Exercice 1 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r=2$ et de 1[er] terme $u_0=-3$

1. Exprimer u_1 en fonction de u_0 et de r
2. Exprimer u_n en fonction de n puis calculer le centième terme de cette suite.

Correction

1. $u_1=u_0+r$
2. $u_n=u_0+nr$ donc $u_{99}=-3+99\times 2=-3+198=195$

Attention : le 100ème terme de la suite est u_{99} *et non pas* u_{100}

Exercice 2 : Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=2n^4-12n^3+22n^2-10n+1$

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer les cinq premiers termes de la suite.
2. Cette suite est-elle arithmétique ?

Correction

1. $u_0=1\,;u_1=3\,;u_2=5\,;u_3=7\,;u_4=57$
2. $u_3-u_2=2$ mais $u_4-u3=50\neq 2$ donc $(u_n)_n$ n'est pas arithmétique.

Exercice 3 : Soit $(v_n)_n$ une suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=-3n+5$.
Démontrer que $(v_n)_n$ est arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

Correction

$\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}-v_n=(-3(n+1)+5)-(-3n+5)=-3n-3+5+3n-5=-3$ donc $(v_n)_n$ est arithmétique de raison $r=-3$ et de 1[er] terme $v_0=-3\times 0+5=5$

Exercice 4 : En 2011, Anne a reçu 80€ d'étrennes. Chaque année, celles-ci augmentent de 6€.

1. Donner les valeurs a_1 et a_2 des étrennes les années 2012 et 2013.
2. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n puis déterminer l'expression a_n des étrennes en $2011+n$
3. Quelle somme totale aura-t-elle reçue le 31 décembre 2026 ?

Correction

1. $a_1=80+6=86$ et $a_2=86+6=92$
2. $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=a_n+6$ donc $(a_n)_n$ est arithmétique de raison $r=6$ et de 1[er] terme $a_0=80$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=a_0+n\times r=80+n\times 6=80+6n$
3. EN 2025, Anne touchera la somme de $a_{15}=80+6\times 15=80+90=170$€
   Le 31 décembre 2026, la somme totale reçue sera donc égale à :
   $$a_0+a_1+a_2+...+a_{15}=16\times\frac{a_0+a_{15}}{2}=16\times\frac{80+170}{2}=16\times\frac{250}{2}=16\times 125=2000\text{€}$$

Exercice 5 :

- Déterminer les 5 premiers termes de la suite géométrique $(u_n)_n$ de 1[er] terme $u_0=1$ et de raison $q=2$
- Déterminer les 5 premiers termes de la suite géométrique $(v_n)_n$ de 1[er] terme $v_0=5$ et de raison $q=-0,5$

Correction

- $u_0=1 ; u_1=2\times 1=2 ; u_2=2\times 2=4 ; u_3=2\times 4=8 ; u_4=2\times 8=16$
- $v_0=5 ; u_1=\frac{-1}{2}\times 5=\frac{-5}{2} ; v_2=\frac{-1}{2}\times\frac{-5}{2}=\frac{5}{4} ; v_3=\frac{-1}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{-5}{8} ; v_4=\frac{-1}{2}\times\frac{-5}{8}=\frac{5}{16}$

Exercice 6 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de 1er terme $u_0=12$ et de raison $q=10$.

1. Exprimer u_n en fonction de n et calculer le huitième terme de la suite.
2. Étudier le sens de variation de la suite.

Correction

1. $(u_n)_n$ est géométrique de raison $q=10$ et de 1er terme $u_0=12$ donc
   $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=u_0\times q^n=12\times 10^n=1{,}2\times 10^{n+1}$
   Le 8ème terme de la suite est $u_7=1{,}2\times 10^8=120\,000\,000$
2.
   $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=1{,}2\times 10^{n+2}-1{,}2\times 10^{n+1}=1{,}2\times 10^{n+1}(10-1)=1{,}2\times 10^{n+1}\times 9=10{,}8\times 10^{n+1}$
   donc $u_{n+1}-u_n>0$ donc $(u_n)_n$ est croissante.

   Ou bien

   $(u_n)_n$ est géométrique de raison $q=10>1$ et de 1er terme $u_0=12>0$ donc $(u_n)_n$ est croissante.

Exercice 7 : Soit $(u_n)_n$ une suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=2\times 5^{n+1}$.
Montrer que la suite $(u_n)_n$ est géométrique et préciser sa raison et son 1er terme.

Correction

$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=2\times 5^{n+2}=2\times 5\times 5^{n+1}=5\times 2\times 5^{n+1}=5\times u_n$ donc $(u_n)_n$ est géométrique de raison $q=5$ et de 1er terme $u_0=2\times 5^1=10$.

Exercice 8 : La population de la banlieue d'une ville augmente de 4 % par an et celle du centre-ville diminue de 5 % par an. En janvier 2011, elles sont toutes les deux de 50 000 habitants. Pour tout entier naturel n ,on note b_n et c_n les populations de la banlieue et du centre-ville l'année $2011+n$.

1. Déterminer les populations b_{n+1} et c_{n+1} l'année 2012 puis les populations en 2013.
2. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et en déduire l'expression de b_n en fonction de n
3. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n et en déduire l'expression de c_n en fonction de n

Correction

1. En 2012, la population de la banlieue sera égale à :
   $b_1=(1+\frac{4}{100})\times 50000=1{,}04\times 50000=52000\,\text{habitants}$
   En 2013, la population de la banlieue sera égale à $b_2=1{,}04\times 52000=54080\,\text{habitants}$

   En 2012, la population du centre ville sera égale à :
   $c_1=(1-\frac{5}{100})\times 50\,000=0{,}95\times 50000=47500\,\text{habitants}$.
   En 2013, la population du centre ville sera de $c_2=0{,}95\times 47500=45125\,\text{habitants}$.

2. $b_{n+1}=b_n\times(1+\frac{4}{100})=b_n\times 1{,}04=1{,}04\,b_n$ donc $(b_n)_n$ est géométrique de raison $q=1{,}04$
   et de 1er terme $b_0=50000$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, b_n=b_0\times q^n=50000\times 1{,}04^n$.

3. $c_{n+1}=c_n\times(1-\frac{5}{100})=c_n\times 0{,}95=0{,}95\,c_n$ donc $(c_n)_n$ est géométrique de raison $q=0{,}95$
   et de 1er terme $c_0=50000$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, c_n=c_0\times q^n=50000\times 0{,}95^n$.