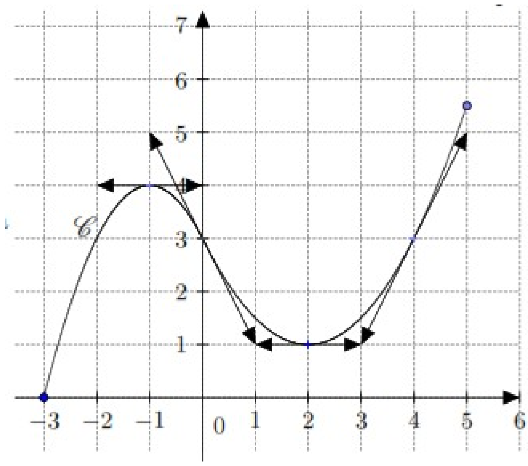
La calculatrice est autorisée

Exercice 1

On donne ci-contre la courbe (C) représentative d'une fonction f .
On a tracé les tangentes aux quatre points d'abscisses respectives -1 ; 0 ; 2 et 4.



1. Lire graphiquement $f(4)$ et $f'(4)$.
2. Par lecture graphique, donner l'équation réduite de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
3. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a observe-t-on que $f'(a)=0$?

Exercice 2

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^3}$ pour $x>0$ $\quad$ $f_2(x)=\frac{x^2-4}{2\sqrt{x}}$ pour $x>0$ $\quad$ $f_3(x)=\frac{x^3-1}{x^4+1}$ pour $x\in\mathbb{R}$

Exercice 3

f est une fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x+4}{x+2}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Montrer que $f'(2)=-\frac{1}{8}$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_2 à C_f au point d'abscisse 2.

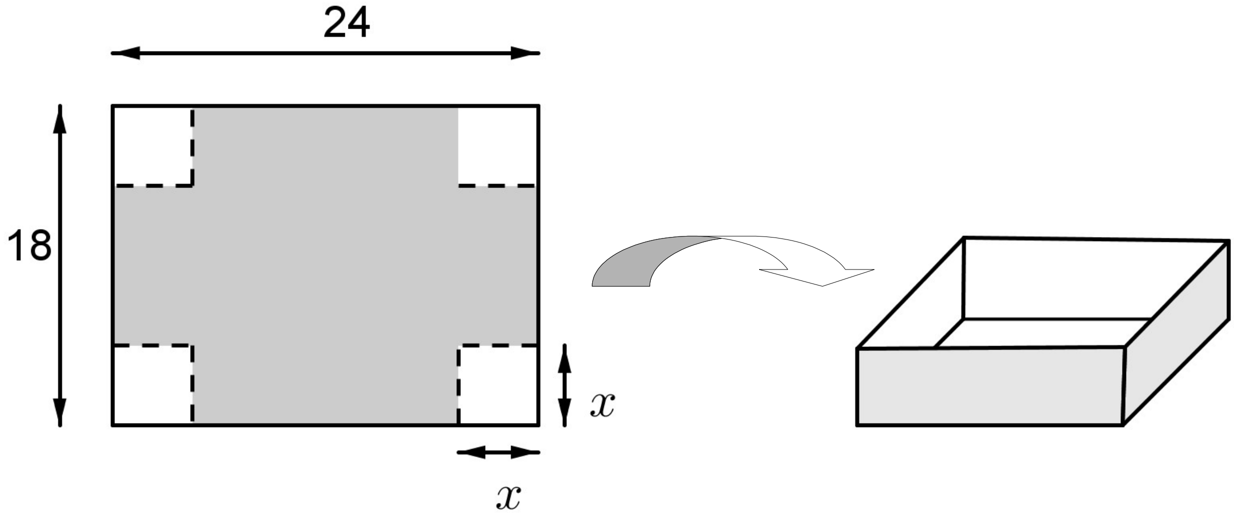
Exercice 4

Une entreprise extrait et vend une matière première, en tonnes. Pour x tonnes vendues, elle réalise un bénéfice, en euro, donné par la fonction $B(x)=-x^3+10x^2+2975x$ définie sur l'intervalle [0;50] .

1. Calculer $B'(x)$.
2. Étudier le signe de $B'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de B .
4. Déterminer la quantité de matière première, en kg, que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est alors le montant de ce bénéfice en euro ?

Exercice 5

Un industriel souhaite fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une plaque de métal de 18 cm de largeur et de 24 cm de longueur. Pour cela, il enlève des carrés dont la longueur du côté mesure x cm aux quatre coins de la pièce de métal et relève ensuite verticalement pour fermer les côtés.



Le volume de la boîte ainsi obtenue est une fonction définie sur l'intervalle $[0;9]$ notée $V(x)$.

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à [0;9], $V(x)=4x^3-84x^2+432x$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de x la contenance de la boîte est-elle maximale ?

Exercice 6

Une petite entreprise artisanale fabrique des répliques d'objets antiques. Au maximum, elle peut en produire 25 par jour. Le coût total de production, en euro, dépend du nombre x d'objets fabriqués. Il est donné par la fonction de coût exprimée par $C(x)=0,1x^2+30x+40$. Le coût unitaire d'un produit est donné par la fonction C_M définie par $C_M(x)=\frac{C(x)}{x}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction C dans le contexte de l'exercice ?
2. À combien s'élèvent les coûts fixes quotidiens ?
3. Quel est l'ensemble de définition de la fonction C_M dans le contexte de l'exercice ?
4. Quel est le coût de production, en euro, d'un objet si la production est de 10 unités ?
5. Montrer que $C_M(x)=0,1x+30+\frac{40}{x}$.
6. Calculer $C'_M(x)$ et démontrer que $C'_M(x)$ peut s'écrire sous la forme $C'_M(x)=\frac{0,1(x-20)(x+20)}{x^2}$.
7. Déterminer, en justifiant, le signe de cette dérivée.
8. Dresser le tableau de variation de C_M .
9. Pour quel nombre de répliques d'objets antiques le coût unitaire est-il minimal ?
10. Calculer le coût unitaire minimal.

Exercice 1

1. Par lecture graphique, $f(4)=3$ et $f'(4)=2$.
2. Par lecture graphique, $T_0 : y=-2x+3$
3. Par lecture graphique, C_f a deux tangentes horizontales l'une au point d'abscisse $a=-1$ et l'autre au point d'abscisse $a=2$. On déduit que $f'(a)=0 \Leftrightarrow a=-1 \text{ ou } a=2$.

Exercice 2

Soit $x>0$. On a :

$$f'_1(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times x^3-3x^2\times\sqrt{x}}{(x^3)^2}=\frac{\frac{x^3}{2\sqrt{x}}-\frac{3x^2\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x^6}=\frac{x^3-6x^3}{2\sqrt{x}x^3}=\frac{-5x^3}{2\sqrt{x}x^6}=\frac{-5}{2\sqrt{x}x^3}=\frac{-5\sqrt{x}}{2x^4}$$

Soit $x>0$. On a :

$$f'_2(x)=\frac{2x\times2\sqrt{x}-2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-4)}{(2\sqrt{x})^2}=\frac{4x\sqrt{x}-\frac{(x^2-4)}{\sqrt{x}}}{4x}=\frac{4x\sqrt{x}\sqrt{x}-x^2+4}{4x\sqrt{x}}=\frac{4x^2-x^2+4}{4x\sqrt{x}}$$

$$f'_2(x)=\frac{3x^2+4}{4x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}(3x^2+4)}{4x^2}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $f'_3(x)=\frac{3x^2(x^4+1)-4x^3(x^3-1)}{(x^4+1)^2}=\frac{3x^6+3x^2-4x^6+4x^3}{(x^4+1)^2}=\frac{-x^6+4x^3+3x^2}{(x^4+1)^2}$

Exercice 3

1. f est dérivable sur $]-2;+\infty[$ comme quotient de fonctions affines dérivables sur $]-2;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-2;+\infty[$.
   $\forall x>-2, f'(x)=\frac{1\times(x+2)-1\times(x+4)}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x-4}{(x+2)^2}=\frac{-2}{(x+2)^2}$ do,nc $f'(2)=\frac{-2}{(2+2)^2}=-\frac{2}{16}=-\frac{1}{8}$

2. $T_2 : y=f'(2)(x-2)+f(2)$ avec $f'(2)=-\frac{1}{8}$ et $f(2)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$
   $T_2 : y=-\frac{1}{8}(x-2)+\frac{3}{2}=-\frac{1}{8}x+\frac{2}{8}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}+\frac{6}{4}=-\frac{1}{8}x+\frac{7}{4}$

   Conclusion : $T_2 : y=-\frac{1}{8}x+\frac{7}{4}$

Exercice 4

1. B est dérivable sur [0;50] comme fonction polynôme.
   $\forall x\in[0;50], B'(x)=-3x^2+20x+2975$.
2. $B'(x)=-3x^2+20x+2975$ est une fonction polynôme du second degré sous sa forme développée.
   $\Delta=20^2-4\times(-3)\times2975=36100=190^2>0$ donc B a deux racines réelles distinctes :
   $x_1=\frac{-20-190}{-6}=\frac{-210}{-6}=35$ et $x_2=\frac{-20+190}{-6}=\frac{171}{-6}<0$.

3. Le coefficient des x^2 vaut $a=-3<0$ d'où le tableau de variations suivants :

x	0		35		50
$B'(x)$		+	0	-	
B	0	↗	73500	↘	48750

4. On déduit que B a un maximum pour $x=35$ qui vaut 73500.
L'entreprise fera un bénéfice maximal égal à 73500€ lorsqu'elle produira et vendra 35000 kg de matières premières.

Exercice 5

1. $\forall x\in[\ 0;9],V(x)=(24-2x)(18-2x)x=(432-48x-36x+4x^2)x=(4x^2-84x+432)x$
$\forall x\in[\ 0;9],V(x)=4x^3-84x^2+432x$

2. Étude de V sur $\mathbb{R}$
V est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $\forall x\in\mathbb{R}, V'(x)=12x^2-168x+432$
$\Delta=(-168)^2-4\times12\times432=7488=24\sqrt{13}>0$ donc V a deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:
$x_1\dfrac{168-24\sqrt{13}}{24}=7-\sqrt{13}\approx3{,}4\in[0;9]$ et $x_1\dfrac{168+24\sqrt{13}}{24}=7+\sqrt{13}\approx10{,}6\notin[0;9]$.
De plus, le coefficient des x^2 est $a=12>0$ d'où le tableau de signes de $V'(x)$ sur [0;9] et de variations de V sur [0;9] :

x	0		$7-\sqrt{13}$		9
$V'(x)$		+	0	-	
V		↗		↘	

On déduit que V admet un maximum en $x=7-\sqrt{13}$.

Exercice 6 – 10 points

1. La fonction C est définie sur [0 ; 25].
2. $C(0)=40$ donc les coûts fixes s'élèvent à 40€.
3. La fonction C_M est définie sur]0 ; 25].
4. Le coût de production, en euro, d'un objet si la production est de 10 unités vaut :
   $C_M(10)=\frac{C(10)}{10}=\frac{0,1\times10^2+30\times10+40}{10}=\frac{10+300+40}{10}=\frac{350}{10}=35\,€$
5. Soit $0<x\leqslant25$. On a :
   $C_M(x)=\frac{0,1x^2+30x+40}{x}=\frac{0,1x^2}{x}+\frac{30x}{x}+\frac{40}{x}=0,1x+30+\frac{40}{x}$.
6. $\forall x\in]0;25],C'_M(x)=0,1+0+40\times(\frac{-1}{x^2})=0,1-\frac{40}{x^2}=\frac{0,1x^2-40}{x^2}$

   Or, $0,1(x-20)(x+20)=0,1(x^2+20x-20x-400)=0,1(x^2-400)=0,1x^2-40$

   donc $C'_M(x)=\frac{0,1(x-20)(x+20)}{x^2}$
7. $\forall\in]0;25],x^2>0;0,1>0,(x+20)>0$ donc le signe de $C'_M(x)$ dépend du signe de $(x-20)$.
   Or, $x-20=0\Leftrightarrow x=20$ et $x-20>0\Leftrightarrow x>20$ d'où le tableau de signes de $C'_M(x)$ sur]0 ; 25] :

x	0		20		25
$C'_M(x)$	||	-	0	+	

8. On déduit le tableau de variation de C_M sur [0;25] :

x	-0		20		25
$C_M'(x)$	||	-	0	+	
$C_M(x)$	||	↘	34	↗	34,1

9. D'après le tableau de variations, on déduit que le unitaire est minimal si l'entreprise produit 20 répliques.
10. Il vaut alors $C_M(20)=0,1\times20+30+\frac{40}{20}=2+30+2=34\,€$.