

La calculatrice est interdite

Exercice 1

On considère la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x^2 - 3x + 8$.

1. Calculer $f'(-2)$ à l'aide du taux d'accroissement.
2. Retrouver ce résultat à l'aide de la fonction dérivée $f'(x)$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-2} à C_f au point d'abscisse -2.
4. Calculer $f'(a)$ à l'aide du taux d'accroissement.
5. Déterminer les tangentes éventuelles à C_f parallèles à la droite $(d): y = -7x + 11$.

Exercice 2

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $g(x) = \frac{-1}{3-x}$.

1. Calculer $g'(-2)$ à l'aide du taux d'accroissement.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-2} à C_g au point d'abscisse -2.
3. Calculer $g'(a)$ à l'aide du taux d'accroissement.
4. Déterminer les tangentes éventuelles à C_g parallèles à la droite $(d): y = -x + 5$.

Exercice 3

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{2}{1-x}$.

1. Calculer $g'(-1)$ à l'aide du taux d'accroissement.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-1} à C_g au point d'abscisse -1.
3. Calculer $g'(a)$ à l'aide du taux d'accroissement.
4. Déterminer les tangentes éventuelles à C_g parallèles à la droite $(d): y = -3x + 12$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = -4x^2 - x + 1$.

1. Calculer $f'(-3)$ à l'aide du taux d'accroissement.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-3} à C_f au point d'abscisse -3.
3. Calculer $f'(-3)$ à l'aide de la fonction dérivée $f'(x)$.
4. Déterminer les tangentes éventuelles à C_f parallèles à la droite $(d): y = 2x + 8$.

Exercice 5

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{3}{1-x}$.

1. Calculer $g'(-2)$ à l'aide du taux d'accroissement.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-2} à C_g au point d'abscisse -2.
3. Calculer $g'(a)$ à l'aide du taux d'accroissement.
4. Déterminer les tangentes éventuelles à C_g parallèles à la droite $(d): y = 2x + 8$.

Exercice 1

On considère la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x^2 - 3x + 8$.

1. Calculer $f'(-2)$ à l'aide du taux d'accroissement.
2. Retrouver ce résultat à l'aide de la fonction dérivée $f'(x)$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-2} à C_f au point d'abscisse -2.
4. Calculer $f'(a)$ à l'aide du taux d'accroissement.
5. Déterminer les tangentes éventuelles à C_f parallèles à la droite $(d): y = -7x + 11$.

Correction

On considère la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x^2 - 3x + 8$.

1. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{[-2(-2+h)^2 - 3(-2+h) + 8] - (-2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 8)}{h}$$

$$T(h) = \frac{[-2(4 - 4h + h^2) + 6 - 3h + 8] - 6}{h} = \frac{-8 + 8h - 2h^2 + 6 - 3h + 8 - 6}{h} = \frac{-2h^2 + 5h}{h}$$

$$T(h) = \frac{h(-2h + 5)}{h} = -2h + 5 \text{ d'où } \lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} -2h + 5 = 5 \in \mathbb{R}$$

donc f est dérivable en $a = -2$ et $f'(-2) = 5$.

2. f est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -4x - 3$ donc $f'(-2) = -4 \times (-2) - 3 = 8 - 3 = 5$. on retrouve le résultat du 1.

3. $T_a: y = f'(a)(x - a) + f(a)$
 $T_{-2}: y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)$
 $T_{-2}: y = 5(x + 2) + 6$
 $T_{-2}: y = 5x + 10 + 6$
 $T_{-2}: y = 5x + 16$

4. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{[-2(a+h)^2 - 3(a+h) + 8] - (-2a^2 - 3a + 8)}{h} = \frac{[-2(a^2 + 2ah + h^2) - 3a - 3h + 8] + 2a^2 + 3a + 8}{h}$$

$$T(h) = \frac{-2a^2 - 4ah - 2h^2 - 3a - 3h + 8 + 2a^2 + 3a + 8}{h} = \frac{-2h^2 - 4ah - 3h}{h} = \frac{h(-2h - 4a - 3)}{h}$$

$$T(h) = -2h - 4a - 3 \text{ d'où } \lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} -2h - 4a - 3 = -4a - 3 \in \mathbb{R}$$

5. Le coefficient directeur de $(d): y = -7x + 11$ vaut $m = -7$.
 C_f admet une tangente parallèle à (d) en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f'(a) = -7$.
 $f'(a) = -7 \Leftrightarrow -4a - 3 = -7 \Leftrightarrow -4a = -4 \Leftrightarrow a = 1$.

Conclusion : C_f a une seule tangente parallèle à (d) , au point d'abscisse $a = 1$.

Exercice 2

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $g(x) = \frac{-1}{3-x}$.

1. Calculer $g'(-2)$ à l'aide du taux d'accroissement.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-2} à C_g au point d'abscisse -2.
3. Calculer $g'(a)$ à l'aide du taux d'accroissement.
4. Déterminer les tangentes éventuelles à C_g parallèles à la droite $(d): y = -x + 5$.

Correction

1. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = \frac{\frac{-1}{3-(-2+h)} - \frac{-1}{3-(-2)}}{h} = \frac{\frac{-1}{5-h} - \frac{-1}{5}}{h} = \frac{\frac{-1}{5-h} + \frac{1}{5}}{h} = \frac{\frac{-5+5-h}{5(5-h)}}{h}$$

$$T(h) = \frac{-h}{5(5-h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{5(5-h)} \text{ d'où :}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{5(5-h)} = -\frac{1}{25} \in \mathbb{R} \text{ donc } g \text{ est dérivable en } -2 \text{ et } g'(-2) = -\frac{1}{25}$$

2. $T_a: y = g'(a)(x-a) + g(a)$

$$T_{-2}: y = -\frac{1}{25}(x+2) + \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$T_{-2}: y = -\frac{1}{25}x - \frac{2}{25} - \frac{5}{25}$$

$$T_{-2}: y = -\frac{1}{25}x - \frac{7}{25}$$

3. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{\frac{-1}{3-(a+h)} - \frac{-1}{3-a}}{h} = \frac{\frac{-1}{3-a-h} - \frac{-1}{3-a}}{h} = \frac{\frac{-1}{3-a-h} + \frac{1}{3-a}}{h}$$

$$T(h) = \frac{\frac{-(3-a) + (3-a-h)}{(3-a-h)(3-a)}}{h} = \frac{\frac{-3+a+3-a-h}{(3-a-h)(3-a)}}{h} = \frac{\frac{-h}{(3-a-h)(3-a)}}{h} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{(3-a-h)(3-a)} \text{ d'où :}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(3-a-h)(3-a)} = -\frac{1}{(3-a)^2} \in \mathbb{R} \text{ donc } g \text{ est dérivable en } a \text{ et } g'(a) = -\frac{1}{(3-a)^2}$$

4. $(d): y = -x + 5$ a pour coefficient directeur $m = -1$.

Or, deux droites non parallèles à l'axe (Oy) sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur. On déduit que C_g a une tangente parallèle à (d) s'il existe un réel a tel que $g'(a) = -1$.

$$g'(a) = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{(3-a)^2} = -1 \Leftrightarrow -1 = -(3-a)^2 \Leftrightarrow (3-a)^2 = 1 \Leftrightarrow (3-a) = 1 \text{ ou } (3-a) = -1$$

$$g'(a) = -1 \Leftrightarrow -a = 1 - 3 = -2 \text{ ou } -a = -1 - 3 = -4 \Leftrightarrow a = 2 \text{ ou } a = 4$$

Conclusion : C_g a deux tangentes parallèles à (d) , l'une au point d'abscisse $a = 2$ et l'autre au point d'abscisse $a = 4$.

Exercice 3

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{2}{1-x}$.

1. Calculer $g'(-1)$ à l'aide du taux d'accroissement.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-1} à C_g au point d'abscisse -1.
3. Calculer $g'(a)$ à l'aide du taux d'accroissement.
4. Déterminer les tangentes éventuelles à C_g parallèles à la droite $(d): y = -3x + 12$.

Correction

1. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \frac{\frac{2}{1-(-1+h)} - \frac{2}{1-(-1)}}{h} = \frac{\frac{2}{2-h} - 1}{h} = \frac{2 - (2-h)}{h(2-h)} = \frac{h}{h(2-h)} = \frac{1}{2-h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2-h} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ donc } g \text{ est dérivable en } -1 \text{ et } g'(-1) = \frac{1}{2}$$

2. $T_a: y = g'(a)(x-a) + g(a)$

$$T_{-1}: y = \frac{1}{2}(x+1) + 1$$

$$T_{-1}: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 1$$

$$T_{-1}: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

3. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{\frac{2}{1-(a+h)} - \frac{2}{1-a}}{h} = \frac{\frac{2}{1-a-h} - \frac{2}{1-a}}{h} = \frac{2(1-a) - 2(1-a-h)}{h(1-a-h)(1-a)}$$

$$T(h) = \frac{2-2a-2+2a+2h}{h(1-a-h)(1-a)} = \frac{2h}{h(1-a-h)(1-a)} = \frac{2h}{(1-a-h)(1-a)} \times \frac{1}{h} = \frac{2}{(1-a-h)(1-a)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(1-a-h)(1-a)} = \frac{2}{(1-a)^2} \in \mathbb{R} \text{ donc } g \text{ est dérivable en } a \text{ et } g'(a) = \frac{2}{(1-a)^2}$$

4. $(d): y = -3x + 12$ a pour coefficient directeur $m = -3$.

Or, deux droites non parallèles à l'axe (Oy) sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur. On déduit que C_g a une tangente parallèle à (d) s'il existe un réel a tel que $g'(a) = -3$.

$$g'(a) = -3 \Leftrightarrow \frac{2}{(1-a)^2} = -3: \text{ Impossible car } \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 1, \frac{2}{(1-a)^2} > 0$$

Conclusion : Il n'existe aucune tangente à C_g parallèles à (d) .

Exercice 4

On considère la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = -4x^2 - x + 1$.

1. Calculer $f'(-3)$ à l'aide du taux d'accroissement.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-3} à C_f au point d'abscisse -3.
3. Calculer $f'(-3)$ à l'aide de la fonction dérivée $f'(x)$.
4. Déterminer les tangentes éventuelles à C_f parallèles à la droite $(d): y = 2x + 8$.

Correction

1. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \frac{[-4(-3+h)^2 - (-3+h) + 1] - (-4 \times (-3)^2 - (-3) + 1)}{h}$$

$$T(h) = \frac{[-4(9 - 6h + h^2) + 3 - h + 1] - (-32)}{h} = \frac{-36 + 24h - 4h^2 + 3 - h + 1 + 32}{h} = \frac{-4h^2 + 23h}{h}$$

$$T(h) = \frac{h(-4h + 23)}{h} = -4h + 23$$

d'où $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} -4h + 23 = 23 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en $a = -3$ et $f'(-3) = 23$.

2. $T_a: y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$$T_{-3}: y = f'(-3)(x + 3) + f(-3)$$

$$T_{-3}: y = 23(x + 3) - 32$$

$$T_{-3}: y = 23x + 69 - 32$$

$$T_{-3}: y = 23x + 37$$

3. f est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -8x - 1 \text{ donc } f'(-3) = -8 \times (-3) - 1 = 24 - 1 = 23$$

4. C_f a une tangente parallèle à $(d): y = 2x + 8$ si et seulement si, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 2$.

$$f'(a) = 2 \Leftrightarrow -8a - 1 = 2 \Leftrightarrow -8a = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{8}$$

Conclusion : C_f a une unique tangente parallèle à (d) , au point d'abscisse $a = -\frac{3}{8}$.

Exercice 5

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{3}{1-x}$.

1. Calculer $g'(-2)$ à l'aide du taux d'accroissement.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-2} à C_g au point d'abscisse -2.
3. Calculer $g'(a)$ à l'aide du taux d'accroissement.
4. Déterminer les tangentes éventuelles à C_g parallèles à la droite $(d): y=2x+8$.

Correction

1. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \frac{\frac{3}{1-(-2+h)} - \frac{3}{1-(-2)}}{h} = \frac{\frac{3}{3-h} - 1}{h} = \frac{3 - (3-h)}{h(3-h)} = \frac{h}{h(3-h)} = \frac{1}{3-h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3-h} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R} \text{ donc } g \text{ est dérivable en } -2 \text{ et } g'(-2) = \frac{1}{3}$$

2. $T_a: y = g'(a)(x-a) + g(a)$

$$T_{-2}: y = \frac{1}{3}(x+2) + 1$$

$$T_{-1}: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 1$$

$$T_{-1}: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

3. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{\frac{3}{1-(a+h)} - \frac{3}{1-a}}{h} = \frac{\frac{3}{1-a-h} - \frac{3}{1-a}}{h} = \frac{3(1-a) - 3(1-a-h)}{h(1-a-h)(1-a)}$$

$$T(h) = \frac{3-3a-3+3a+3h}{h(1-a-h)(1-a)} = \frac{3h}{h(1-a-h)(1-a)} = \frac{3}{(1-a-h)(1-a)} \times \frac{1}{h} = \frac{3}{(1-a-h)(1-a)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{(1-a-h)(1-a)} = \frac{3}{(1-a)^2} \in \mathbb{R} \text{ donc } g \text{ est dérivable en } a \text{ et } g'(a) = \frac{3}{(1-a)^2}$$

4. $(d): y=2x+8$ a pour coefficient directeur $m=2$.

Or, deux droites non parallèles à l'axe (Oy) sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur. On déduit que C_g a une tangente parallèle à (d) s'il existe un réel a tel que $g'(a)=2$.

$$g'(a)=2 \Leftrightarrow \frac{3}{(1-a)^2}=2 \Leftrightarrow (1-a)^2=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 1-a=\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } (1-a)=-\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow a=1-\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } a=1+\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Conclusion : C_g a deux tangentes parallèles à (d) , l'une au point d'abscisse $a=1-\sqrt{\frac{3}{2}}$ et l'autre au point d'abscisse $a=1+\sqrt{\frac{3}{2}}$.