La calculatrice est interdite

Exercice

1. Dans un repère orthonormé, on considère la parabole C_f de la fonction du second degré f admettant pour sommet $S(-2;-5)$ et passant par le point $A(3;0)$.
   (a) Montrer rigoureusement que la forme canonique de f est $f(x)=\frac{1}{5}(x+2)^2-5$.
   (b) Montrer que $f(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}x-\frac{21}{5}$
   (c) Déterminer les racines de f puis sa forme factorisée.
2. On considère la courbe C_g symétrique de C_f par rapport à l'origine O du repère.
   (a) Donner la forme canonique de g .
   (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g .

Correction

1. (a) C_f est la parabole de la fonction du second degré f admettant pour sommet $S(-2;-5)$ donc $f(x)=a(x+2)^2-5$ avec $a\in\mathbb{R}^*$. Or, $A(-3;0)\in C_f$ donc $f(3)=0$.
$f(3)=0 \Leftrightarrow a(3+2)^2-5=0 \Leftrightarrow 25a-5=0 \Leftrightarrow a=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$.

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{5}(x+2)^2-5$.

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $f(x)=\frac{1}{5}(x+2)^2-5=\frac{1}{5}(x^2+4x+4)-5=\frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}-5=\frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}x-\frac{21}{5}$.

(c) $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{5}(x^2+4x-21)$ donc $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+4x-21=0$

Résolution de $x^2+4x-21=0$ dans $\mathbb{R}$.

$\Delta=4^2-4\times1\times(-21)=16+84=100=10^2>0$ donc $x^2+4x-21$ a deux racines réelles distinctes $x_1=\frac{-4-10}{2}=\frac{-14}{2}=-7$ et $x_2=\frac{-4+10}{2}=\frac{6}{2}=3$

Conclusion : f a deux racines réelles distinctes $x_1=-7$ et $x_2=3$ et est donc factorisable sous la forme $f(x)=\frac{1}{5}(x+7)(x-3)$.

2. (a) C_g est la parabole symétrique de C_f par rapport à l'origine O du repère donc son sommet est $S'(2;5)$ et son coefficient des x^2 vaut $a'=-a=-\frac{1}{5}$.

Sa forme canonique est donc $g(x)=-\frac{1}{5}(x-2)^2+5$.

(b) Soit $M(x;y)$ un point du plan.
$M(x;y)\in C_f\cap C_g \Leftrightarrow \frac{1}{5}(x+2)^2-5=-\frac{1}{5}(x-2)^2+5 \Leftrightarrow \frac{1}{5}\left((x+2)^2+(x-2)^2\right)=10$
$M(x;y)\in C_f\cap C_g \Leftrightarrow (x^2+4x+4+x^2-4x+4)=50 \Leftrightarrow 2x^2+8=50 \Leftrightarrow 2x^2=42 \Leftrightarrow x^2=21$
$M(x;y)\in C_f\cap C_g \Leftrightarrow x=\sqrt{21}$ ou $x=-\sqrt{21}$

Or, $f(\sqrt{21})=\frac{1}{5}(\sqrt{21}^2+4\sqrt{21}-21)=\frac{1}{5}(21+4\sqrt{21}-21)=\frac{4\sqrt{21}}{5}$
et $f(-\sqrt{21})=\frac{1}{5}((-\sqrt{21})^2+4\times(-\sqrt{21})-21)=\frac{1}{5}(21-4\sqrt{21}-21)=\frac{-4\sqrt{21}}{5}$

Conclusion : C_f et C_g se coupent en $M_1\left(\sqrt{21};\frac{4\sqrt{21}}{5}\right)$ et en $M_2\left(-\sqrt{21};\frac{-4\sqrt{21}}{5}\right)$.