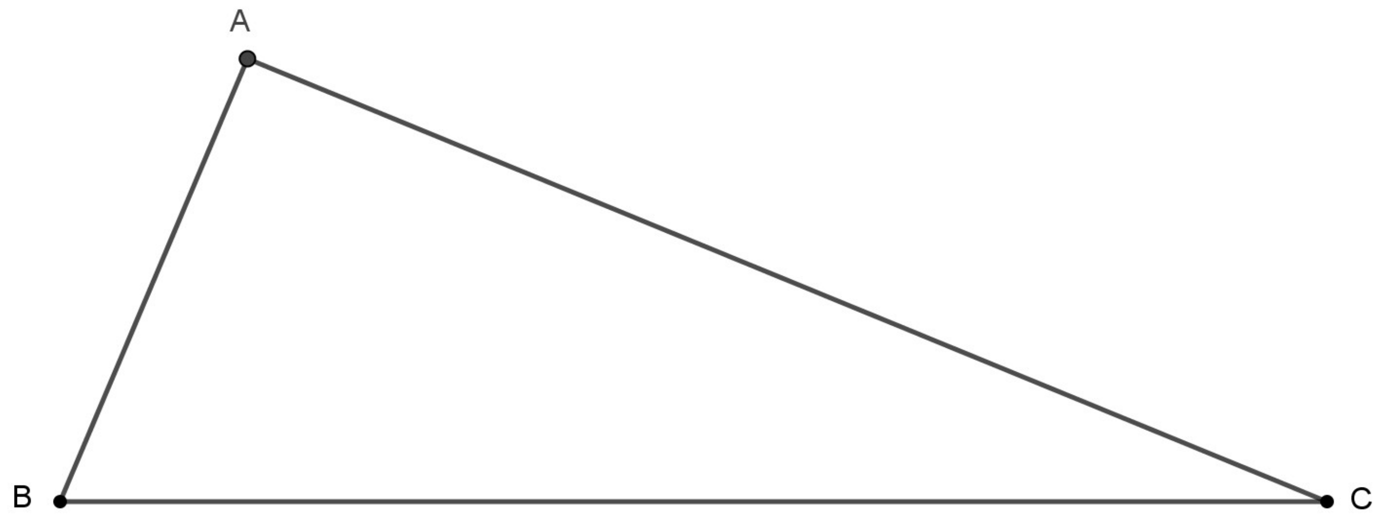
Sujet A

La calculatrice est autorisée

La rédaction et la rigueur des raisonnements seront une part importante de la note.

Exercice
On considère un triangle ABC tel que BC = 13 cm, AC = 12 cm et AB = 5cm.
La figure n'est pas en taille réelle et sera complétée au fur et à mesure des questions.



1. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.
2. Calculer son aire A_{ABC} .
3. A l'aide de la trigonométrie, exprimer $\sin\left(\widehat{ABC}\right)$ puis déterminer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.
4. Sur la figure, construire le projeté orthogonal de A sur (BC). On le notera H.
   (a) Comment appelle-t-on la droite (AH) dans le triangle ABC ?
   (b) A l'aide des lettres de la figure uniquement, préciser la distance du point A à la droite (BC).
   (c) En prenant comme base le côté [BC], donner l'expression de l'aire du triangle ABC.
   (d) A l'aide de la question 2., calculer la valeur exacte de AH.
5. Placer le point O milieu de [BC] puis construire le point D symétrique de A par rapport à O.
   (a) Justifier que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
   (b) Justifier que le parallélogramme ABCD est un rectangle.
   (c) Justifier que OA = OB = OC = OD.
   (d) En déduire que les points ABC sont situés sur un même cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.

Correction

1. Dans le triangle ABC, le plus grand côté est BC.
   On a $BC^2 = 13^2 = 169$ et $BA^2+AC^2 = 5^2+12^2 = 25+144 = 169$ donc $BC^2= BA^2+AC^2$ donc ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.
2. On déduit que $A_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{5\times 12}{2}=\frac{60}{2}=30\,cm^2$.
3. Dans ABC rectangle en A, on a $\sin(\widehat{ABC})=\frac{AC}{BC}=\frac{12}{13}$ donc $\widehat{BAC}\approx 67°$ arrondi au degré .
4. Sur la figure, construire le projeté orthogonal de A sur (BC). On le notera H.
   (a) (AH) est la hauteur issue de A au ABC.
   (b) H est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc la distance du point A à la droite (BC) est AH.
   (c) On déduit que $A_{ABC}=\frac{BC\times AH}{2}$.
   (d) On déduit que $\frac{BC\times AH}{2}=30\Leftrightarrow 13\times AH=60\Leftrightarrow AH=\frac{60}{13}$.
5. Placer le point O milieu de [BC] puis construire le point D symétrique de A par rapport à O.
   (a) O est le milieu de [BC] et D est le symétrique de A par rapport à O donc O est également le milieu de [AD]. On déduit que les diagonales [BC] et [AD] du quadrilatère ABCD ont même milieu O donc ABCD est un parallélogramme.
   (b) Le parallélogramme ABCD a un angle droit en A (car ABC est rectangle en A) donc le parallélogramme ABCD est un rectangle.
   (c) ABCD est un rectangle de centre O donc ses diagonales ont même milieu et même longueur donc OA=OB=OC=OD.
   (d) On déduit que OA=OB=OC donc les points A,B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon R = 13 : 2 = 6,5 cm.