# Chapitre 4 : Probabilités conditionnelles

## I. Probabilités conditionnelles

Dans tout ce chapitre, E désigne l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.
E est appelé **univers**.

### 1. Probabilité conditionnelle de B sachant A

**Définition :** Soit A et B deux événements de l'univers E, A étant de probabilité non nulle (P(A) ≠ 0).
**La probabilité conditionnelle de B sachant A** (probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé) est le nombre noté $\boldsymbol{P_A(B)}$ défini par $\boldsymbol{P_A(B)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}}$

*Remarques :*
- $P_A(B)$ *se note aussi* $P(B/A)$
- *Il s'agit d'une nouvelle probabilité, dite probabilité conditionnelle, définie sur l'univers E.*
- *Cette probabilité a toutes les propriétés d'une probabilité.*
- *ATTENTION :* $P_A(B)\neq P_B(A)$

**Propriété :** Soit A et B deux événements tels que P(A) ≠ 0 alors :

$$\boldsymbol{0\leqslant P_A(B)\leqslant 1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{P_A(B)+P_A(\bar{B})=1}$$

Dans une situation <u>d'équiprobabilité</u>, $P_A(B)=\dfrac{nombre\ d'\ éléments\ de\ \{B\cap A\}}{nombre\ d'\ éléments\ de\ A}$

Exercice 1 :
Dans une population donnée, 84 % des personnes possèdent un téléphone portable et 75 % des personnes possèdent un ordinateur. De plus, 60 % des personnes de cette population déclarent posséder les deux. On rencontre par hasard une personne de cette population.
On considère les événements :
T : « La personne rencontrée possède un téléphone portable »
O : « La personne rencontrée possède un ordinateur »

1. Déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement O sachant T est réalisé.
2. Déterminer la probabilité que la personne rencontrée possède un téléphone portable sachant qu'elle a un ordinateur.

**Propriété : Probabilité d'une intersection ou formule des probabilités composées**

$P(A \cap B)$ peut se calculer de deux façons :

**(1)** $P(A \cap B)=P(A)\times P_A(B)$ **avec** $P(A)\neq 0$

**(2)** $P(A \cap B)=P(B)\times P_B(A)$ **avec** $P(B)\neq 0$

Démonstration : cette propriété se déduit de la définition d'une probabilité conditionnelle.

(1) $P_A(B)=\dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$ donc $P(B \cap A)=P(A)\times P_A(B)$ donc $P(A \cap B)=P(A)\times P_A(B)$

(2) $P_B(A)=\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ donc $P(A \cap B)=P(B)\times P_B(A)$ #

Exercice 2 :
Lors d'une enquête menée auprès d'une population, on a constaté que 85 % des personnes sont des femmes et que, parmi ces femmes, 62 % travaillent à temps partiel.
On choisit une de ces personnes au hasard et on considère les événements :
F : « La personne choisie est une femme »
T : « La personne choisie travaille à temps partiel »

1. Traduire en terme de probabilités les données numériques de l'énoncé.
2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme travaillant à temps partiel.

## 2. Utilisation de tableaux

Un tableau à double entrée permet de déterminer des probabilités conditionnelles.
$P(A \cap B)$ se situe à l'intersection de la ligne A et de la colonne B.
La dernière ligne et dernière colonne du tableau contiennent les probabilités de chaque événement.
$P_A(B)$ est alors le quotient des valeurs de $P(A \cap B)$ et de $P(A)$ lues dans le tableau.

| | **A** | $\bar{A}$ | **Total** |
|---|---|---|---|
| **B** | $P(A \cap B)$ | $P(\bar{A} \cap B)$ | $P(B)$ |
| $\bar{B}$ | $P(A \cap \bar{B})$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(\bar{B})$ |
| **Total** | $P(A)$ | $P(\bar{A})$ | 1 |

Exercice 3 :
Compléter le tableau suivant sachant que $P_{\bar{A}}(B)=0{,}25$

| | **A** | **$\bar{A}$** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **B** | 0,18 | | |
| **$\bar{B}$** | 0,42 | | |
| **Total** | | | |

Exercice 4 :
La répartition des voitures garées dans un parking est donnée dans le tableau ci-contre.
On choisit au hasard un véhicule stationné dans ce parking.
Sachant qu'il est de marque française, quelle est la probabilité que ce soit un diesel ?

| | **Diesel** | **Essence** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **Marque Française** | 0,43 | 0,12 | 0,55 |
| **Marque étrangère** | 0,34 | 0,11 | 0,45 |
| **Total** | 0,77 | 0,23 | 1 |

## II. Arbres pondérés et probabilités totales

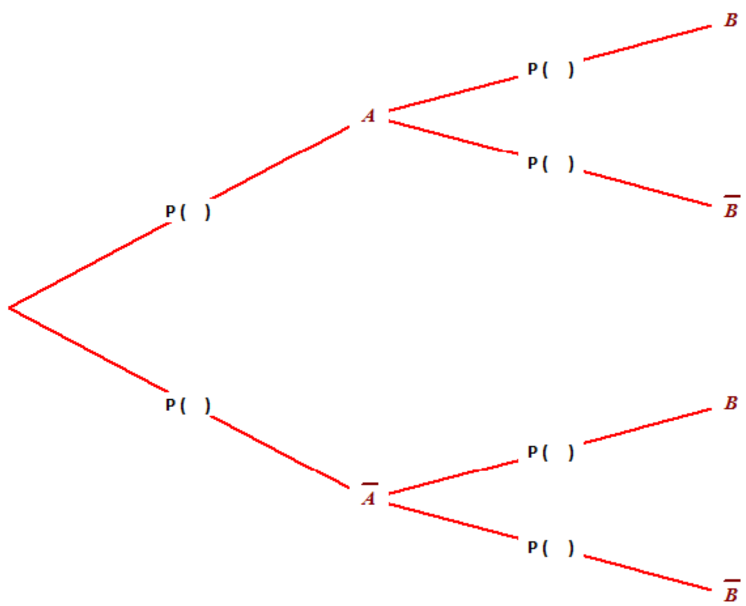
### 1. Probabilité conditionnelle et arbre pondéré

Dans le cas d'une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles dans un univers E, on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré. Pour cela, on peut envisager deux niveaux de branches : un premier niveau indiquant la probabilité de l'événement A puis un second niveau qui permettant de figurer les probabilités conditionnelles en rapport avec l'événement B.

Une **branche** relie deux événements.
Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante : $P_A(B)$
Un **chemin** est une suite de branches ; il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin. La probabilité d'un chemin est la probabilité de l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.
Un **nœud** est le point de départ d'une ou de plusieurs branches.

**Règles :**

**(1)** la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1
**(2)** La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches composant ce chemin
**(3)** La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement




$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$

$$P(A\cap \bar{B})=P(A)\times P_A(\bar{B})$$

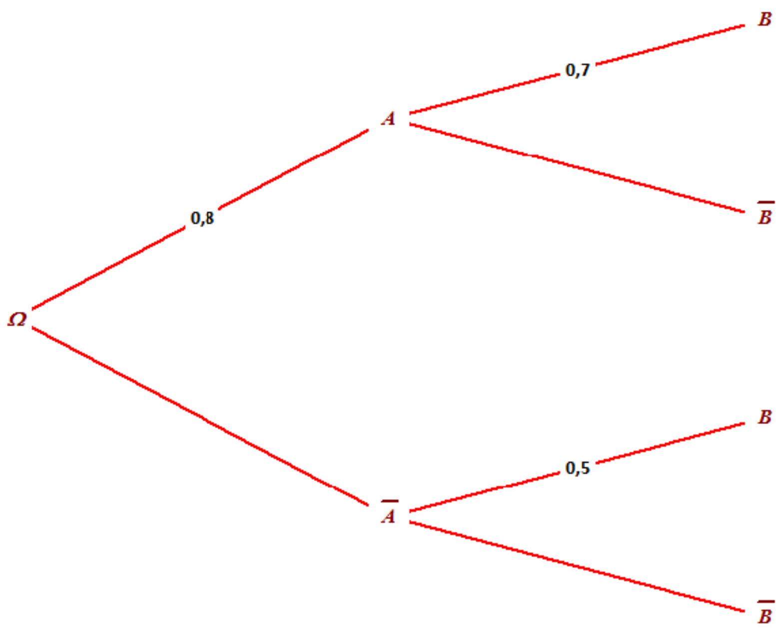
$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B)$$

$$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(\bar{B})$$

Exercice 5 :

On considère deux événements A et B liés à une expérience aléatoire modélisée par l'arbre pondéré ci-dessous.

1. Indiquer la signification des nombres 0,8 ; 0,7 et 0,5.
2. Compléter cet arbre avec les probabilités manquantes
3. Déterminer la probabilité de l'événement $A\cap B$



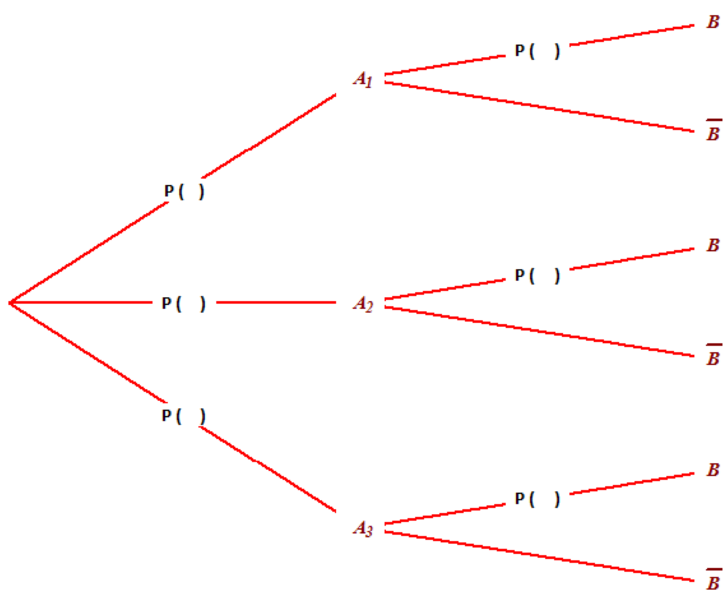
## 2. Formule des probabilités totales

**Définition :** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ désignent n événements.
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits **deux à deux incompatibles** lorsque $\forall i \neq j \in \{1; \ldots; n\}^2, A_i \cap A_j = \emptyset$ .

**Définition :** n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment **une partition** d'un événement A lorsque $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles.

**Propriété :** Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une **partition** d'un événement A. Pour tout événement B, on a :

- $\boldsymbol{P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)}$
- $\boldsymbol{P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}$




$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B)$

$P(A_1 \cap \bar{B}) = P(A_1) \times P_{A_1}(\bar{B})$

$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \times P_{A_2}(B)$

$P(A_2 \cap \bar{B}) = P(A_2) \times P_{A_2}(\bar{B})$

$P(A_3 \cap B) = P(A_3) \times P_{A_3}(B)$

$P(A_3 \cap \bar{B}) = P(A_3) \times P_{A_3}(\bar{B})$

**Cas particulier :** Soit un événement A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$ alors :

$\boldsymbol{P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)}$ ou encore $\boldsymbol{P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)}$

Exercice 6 :
Trois candidats A, B et C se présentent à une élection. Ils obtiennent respectivement la moitié, les trois dixièmes et le cinquième des suffrages. D'autre part, on sait que 50 % des électeurs de A, 30 % des électeurs de B et 40 % des électeurs de C sont des hommes.
On interroge au hasard une personne s'étant prononcée pour l'un des trois candidats.

1. Décrire l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré
2. En déduire la probabilité d'interroger un homme ayant voté pour le candidat C.
3. On interroge au hasard une personne s'étant prononcée pour l'un des trois candidats. Déterminer la probabilité que ce soit une femme.

## III. Indépendance de deux événements

### 1. Deux événements indépendants

**Définition :** Deux événements A et B de probabilité non nulle sont dits **indépendants** si et seulement si la réalisation ou non de l'un des événements ne modifie pas la probabilité de l'autre.

**Définition :** Deux événements A et B de probabilité non nulle sont dits **indépendants** si et seulement si l'une des égalités suivantes est vérifiée :

$$\boldsymbol{P_A(B)=P(B)} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{P_B(A)=P(A)}$$

*Remarque : si P(A) = 0 ou P(B) = 0 alors les événements A et B sont dits indépendants*

**Propriété :** Deux événements A et B de probabilité non nulle sont dits **indépendants** si et seulement si

$$\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

Démonstration : Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

A et B sont indépendants ssi $P_A(B)=P(B)$ ou $P_B(A)=P(A)$

Or $P_A(B)=P(B)\Leftrightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(B)\times P(A)$

Et

$P_B(A)=P(A)\Leftrightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

#

Exercice 7 :
A partir du tableau suivant, étudier l'indépendance des événements A et B.

| | **A** | $\bar{A}$ | **Total** |
|---|---|---|---|
| **B** | 0,3 | 0,1 | 0,4 |
| $\bar{B}$ | 0,45 | 0,15 | 0,6 |
| **Total** | 0,75 | 0,25 | 1 |

Exercice 8 :
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :
A : « La carte tirée est un carreau »  B : « La carte tirée est un roi » C : « La carte tirée est rouge »

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Les événements A et C sont-ils indépendants ?
3. Les événements B et C sont-ils indépendants ?

## 2. Indépendance et événements contraires

**Propriété :** Si deux événements A et B sont **indépendants** alors $\bar{A}$ **et** $B$ , $A$ **et** $\bar{B}$ et $\bar{A}$ **et** $\bar{B}$ sont **aussi indépendants.**

Démonstration :
Soit A et B deux événements indépendants alors $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

- Montrons que $\bar{A}$ et $B$ sont aussi indépendants c'est à dire $P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\times P(B)$

$$P(\bar{A}\cap B)=P_B(\bar{A})\times P(B)=(1-P_B(A))\times P(B)=P(B)-P_B(A)\times P(B)=P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A)\times P(B)=P(B)(1-P(A))=P(B)\times P(\bar{A})$$

- Montrons que $A$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants c'est à dire $P(A\cap\bar{B})=P(A)\times P(\bar{B})$

$$P(A\cap\bar{B})=P_A(\bar{B})\times P(A)=(1-P_A(B))\times P(A)=P(A)-P_A(B)\times P(A)=P(A)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A)\times P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)\times P(\bar{B})$$

- Montrons que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants c'est à dire $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\times P(\bar{B})$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$$

donc $P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(A)\times P(B)$ car $A$ et $B$ sont indépendants

Or $P(\bar{A})\times P(\bar{B})=(1-P(A))\times(1-P(B))=1-P(B)-P(A)+P(A)\times P(B)$

donc $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\times P(\bar{B})$ #

Exercice 9 :

A et B sont deux événements indépendants liés à une expérience aléatoire tels que P(A) = 0,3 et P(B) = 0,4.

Calculer $P(A \cap B)$ ; $P(\bar{A} \cap B)$ ; $P(A \cap \bar{B})$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ .

Exercice 10 :

Sur son trajet pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores. La probabilité pour que le feu soit vert au moment où il arrive à sa hauteur est de 0,4 pour le 1er feu et de 0,45 pour le second feu.

On note A l'événement « le 1er feu est vert » et B l'événement « le second feu est vert ».

On fait l'hypothèse que ces deux événements sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste fasse son trajet sans avoir à s'arrêter ?
2. Calculer $P(A \cap \bar{B})$ . A quel événement correspond cette probabilité ?