

Exercice 1

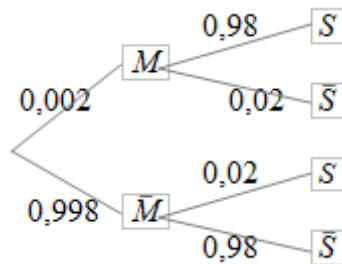
Les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter des voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique. On note S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » et M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ». On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique et on admet que :

- lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est égale à 0,98.

1. Déterminer la probabilité que le portique sonne.
2. Déterminer la probabilité d'avoir un « faux positif », c'est à dire la probabilité que le passager ne porte pas d'objet métallique et que le portique sonne.
3. Si le portique sonne pour un passager, quelle est la probabilité que ce passager porte un objet métallique ?
4. Quelle est la proportion de « faux positif » parmi les passagers pour lesquels le portique a sonné ?
5. Commenter ces résultats.

Correction

1. On peut modéliser la situation par l'arbre pondéré ci-dessous.



Les événements M et \bar{M} forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(S) = P(S \cap M) + P(S \cap \bar{M}) = 0,002 \times 0,98 + 0,998 \times 0,02 = 0,02192$$

2. $P(\bar{M} \cap S) = 0,998 \times 0,02 = 0,01996$.

3. $P_S(M) = \frac{P(S \cap M)}{P(S)} = \frac{0,002 \times 0,98}{0,02192} \approx 0,09$.

4. La proportion de « faux positif » parmi les passagers pour lesquels le portique a sonné est $\frac{0,01996}{0,02192} \approx 0,91$

5. Ce portique n'est pas très fiable car dans 91% des cas c'est un faux positifs quand il sonne.

Exercice 2

Les maladies cardio-vasculaires sont l'une des principales cause de mortalité. L'inactivité physique est un facteur de risque majeur dans le développement de ces maladies. Pour évaluer la situation en France, une enquête, portant sur un échantillon de 2000 personnes âgées de 18 à 65 ans, a été menée. On a obtenu les résultats suivants :

- 9% des personnes sont atteintes d'une maladie cardio-vasculaire ;
- parmi les personnes atteintes d'une maladie cardio-vasculaire, 45% pratiquent une activité physique régulière (30 minutes par jour) ;
- parmi les personnes non atteintes d'une maladie cardio-vasculaire, 60 % pratiquent une activité physique régulière.

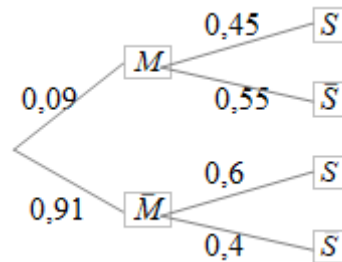
Une campagne de sensibilisation affirme qu'une activité physique régulière fait baisser de plus de 30% la probabilité d'être atteint d'une maladie cardio-vasculaire. Que pensez vous de cette affirmation ?

Correction

On définit les événements :

- M : « la personne choisie est atteinte d'une maladie cardio-vasculaire »
- S : « la personne choisie pratique une activité physique régulière ».

On peut modéliser cette situation par l'arbre pondéré ci-dessous.



On va comparer $P_S(M)$ et $P_{\bar{S}}(M)$

Les événements M et \bar{M} forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(S) = P(S \cap M) + P(S \cap \bar{M}) = 0,09 \times 0,45 + 0,91 \times 0,6 = 0,5865$$

donc $P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 0,4135$

On déduit :

$$P_S(M) = \frac{P(S \cap M)}{P(S)} = \frac{0,09 \times 0,45}{0,5865} \approx 0,07 \quad \text{et} \quad P_{\bar{S}}(M) = \frac{P(\bar{S} \cap M)}{P(\bar{S})} = \frac{0,09 \times 0,55}{0,4135} \approx 0,12$$

Or $(1 - \frac{30}{100}) \times P_{\bar{S}}(M) \approx 0,08 > P_S(M)$ donc oui une activité physique régulière fait baisser de plus de 30% la probabilité d'être atteint d'une maladie cardio-vasculaire

Exercice 3

1. A et B désignent deux événements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire tels que $P(A)=0,3$, $P(B)=0,6$ et $P(A \cap B)=0,09$.
Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. A et B désignent deux événements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire tels que $P(A)=\frac{5}{12}$, $P(B)=\frac{3}{10}$ et $P(A \cap B)=\frac{1}{8}$.
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Correction

1. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,09}{0,3} = 0,3 \neq P(B)$
donc les événements A et B ne sont pas indépendants.
2. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{8} \times \frac{12}{5} = \frac{3}{10} = P(B)$
donc les événements A et B sont indépendants.

Exercice 4

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements A « la carte tirée est un carreau », B « la carte tirée est un roi » et C « la carte tirée est rouge ».

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Correction

1. $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$
 $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$ donc les événements A et B sont indépendants.
2. $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
 $P(A) \times P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq P(A \cap C)$ donc les événements A et C ne sont pas indépendants.