

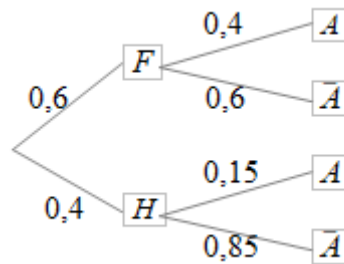
Exercice 1

Une box de crossfit ouvre dans une commune composée de 9000 femmes et 6000 hommes. Un sondage montre que 40% des femmes sont prêtes à prendre un abonnement, contre seulement 15% pour les hommes. On rencontre au hasard un habitant de la commune. Soit les événements F « la personne rencontrée est une femme », H « la personne rencontrée est un homme » et A « la personne est prête à prendre un abonnement ».

1. Montrer que $P(F)=0,6$.
2. Pourquoi est-il pertinent d'utiliser un arbre pondéré pour décrire cette expérience aléatoire ? Construire cet arbre pondéré.
3. Expliciter par une phrase l'événement $F \cap A$.
4. Calculer la probabilité que la personne rencontrée soit un homme prêt à s'abonner à la box.
5. Pauline trouve un papier du sondage d'un habitant sur lequel est écrit « Je ne veux pas m'abonner au centre de fitness ». Déterminer la probabilité que l'écriture soit celle d'une femme.

Correction

1. $P(F) = \frac{9000}{15000} = 0,6$
2. Il est pertinent d'utiliser un arbre pondéré pour décrire cette expérience aléatoire car l'énoncé donne des probabilités conditionnelles.



3. $F \cap A$: "la personne rencontrée est une femme qui souhaite prendre un abonnement"
4. $P(H \cap A) = P_H(A) \times P(H) = 0,4 \times 0,15 = 0,06$
5. $P(\bar{A} \cap F) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$
 $P(\bar{A} \cap H) = 0,4 \times 0,85 = 0,34$

Les événements F et H forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p(\bar{A}) = p(F \cap \bar{A}) + p(H \cap \bar{A}) = 0,36 + 0,34 = 0,7 \quad \text{et donc} \quad p_{\bar{A}}(F) = \frac{p(\bar{A} \cap F)}{p(\bar{A})} = \frac{0,36}{0,7} = \frac{18}{35}$$

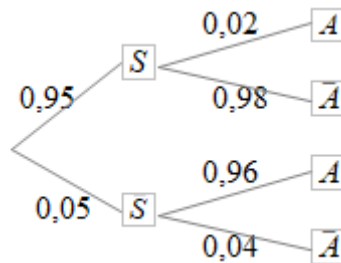
Exercice 2

Pour contrôler le taux d'alcoolémie, un laboratoire a mis au point un alcootest, et les essais ont montré que 5% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété. 96% des personnes en état d'ébriété ont un alcootest positif et 98% des personnes sobres ont un alcootest négatif. On note S l'événement « être sobre », A l'événement « avoir un alcootest positif » et \bar{A} l'événement « avoir un alcootest négatif ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant toutes ces données.
2. Calculer la probabilité qu'une personne soit en état d'ébriété et qu'elle ait un alcootest positif.
3. Calculer la probabilité qu'une personne soit sobre et qu'elle ait un alcootest positif.
4. En déduire la probabilité qu'une personne ait un alcootest positif.
5. Calculer la probabilité d'être sobre si l'alcootest est positif.

Correction

1.



2. La probabilité qu'une personne soit en état d'ébriété et qu'elle ait un alcootest positif est $P(\bar{S} \cap A) = P_{\bar{S}}(A) \times P(\bar{S}) = 0,96 \times 0,05 = 0,048$

3. La probabilité qu'une personne soit sobre et qu'elle ait un alcootest positif est $P(S \cap A) = P_S(A) \times P(S) = 0,02 \times 0,95 = 0,019$

4. Les événements S et \bar{S} forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a : $P(A) = P(S \cap A) + P(\bar{S} \cap A) = 0,019 + 0,048 = 0,067$

5. La probabilité d'être sobre si l'alcootest est positif est

$$P_A(S) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{0,019}{0,067} = \frac{19}{67} \approx 0,284$$

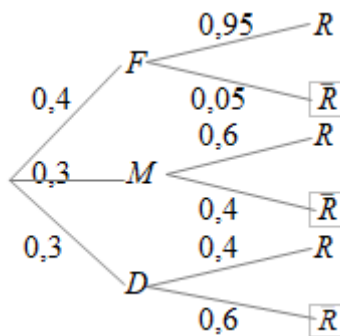
Exercice 3

Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site internet. 40% des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30% sont de niveau moyen et 30% sont de niveau difficile. Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95% des cas, les grilles de niveau moyen dans 60% des cas et les grilles de niveau difficile dans 40% des cas. Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire. On considère les événements F « la grille est de niveau facile », M « la grille est de niveau moyen », D « la grille est de niveau difficile » et R « Pierre réussit la grille ».

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.
3. Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.
4. Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.
5. Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?
6. Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme « Je pense que ta grille était de niveau facile ». Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

Correction

1.



2. La probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse est $P(D \cap R) = P_D(R) \times P(D) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$
3. La probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas est $P(F \cap \bar{R}) = P_F(\bar{R}) \times P(F) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$
4. Les événements F, M et D forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a : $P(R) = P(F \cap R) + P(M \cap R) + P(D \cap R)$ donc $P(R) = 0,4 \times 0,95 + 0,3 \times 0,6 + 0,3 \times 0,4 = 0,38 + 0,18 + 0,12 = 0,68$
5. Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen est $P_{\bar{R}}(M) = \frac{P(\bar{R} \cap M)}{P(\bar{R})} = \frac{0,3 \times 0,4}{1 - 0,68} = \frac{0,12}{0,32} = 0,375$
6. $P_R(F) = \frac{P(R \cap F)}{P(R)} = \frac{0,4 \times 0,95}{0,68} = \frac{0,38}{0,68} \approx 0,56$

$$P_R(M) = \frac{P(R \cap M)}{P(R)} = \frac{0,3 \times 0,6}{0,68} = \frac{0,18}{0,68} \approx 0,26$$
$$P_R(D) = \frac{P(R \cap D)}{P(R)} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,68} = \frac{0,12}{0,68} \approx 0,18$$

On peut remarquer que si Pierre a réussi sa grille, il y a 56% de chance que cette grille soit de niveau facile et donc 44% de chance que cette grille ne soit pas de niveau facile donc il y a un peu plus d'une chance sur 2 que sa sœur ait raison.