Chapitre 2 - Généralités sur les suites

I. Suites numériques

1. Généralités

Définition : Une **suite** est une **fonction** u à valeurs réelles dont la variable est un entier naturel n

- La suite est notée $(u(n)),(u_n)$.
- L'image de n par la fonction u est notée $u(n)$ ou u_n
- $u(n)$ ou u_n se nomme le terme de rang n de la suite
- u_n se lit « *u indice n* »
- u_n est le terme général de la suite
- (u_n)ou$(u_n)_n$ désigne l'ensemble des termes de la suite pour $n \in \mathbb{N}$

Définition : L'ensemble de définition d'une suite est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ ou une partie de celui-ci (lorsque la suite n'est définie que pour des entiers supérieurs à une valeur donnée).

Exercice 1 :
On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 2n^2+1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 2v_n^2+1 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes de chaque suite.
2. Calculer le 5ème terme de chaque suite.

2. Modes de générations de suites

Définition : Une suite peut être définie

- par une fonction f de la variable n . Dans ce cas on a $u_n = f(n)$.
- par une relation de récurrence. (u_n) est alors définie par son 1er terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.
- par un algorithme.
- par un autre moyen, par exemple la suite des décimales de π .
- par un motif géométrique.

Exemples :

a) Suite définie par une fonction f de la variable n

La suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^2+2n+3$ est une suite définie par une fonction.
En effet, on a $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=f(n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x+3$.
Par cette fonction f , on peut calculer « directement » n'importe quel terme de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 2 :
Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_n$.

b) Suite définie par une relation de récurrence.

La suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1}=4u_n-3 \end{cases}$ est une suite définie par son 1^er^ terme $u_0=2$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=4u_n-3$.
Pour calculer le terme u_p , il faut connaître tous les termes précédents.
Ces derniers s'obtiennent grâce à la relation de récurrence.

Exercice 3 :
Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_n$.

c) Suite définie par un algorithme

L'algorithme ci-dessous défini aussi une suite. On utilise une « boucle Pour ».

$A \leftarrow 1$ Pour i allant de 1 à N $\quad A \leftarrow 3\times A+2$ Fin Pour	Cet algorithme calcule tous les termes de la suite les uns après les autres. u_0 vaut 1. Dans la boucle « Pour », On calcule ensuite $3u_0+2$ c'est à dire u_1 puis $u_2, u_3, \dots, u_N$.

Exercice 4 :
1. Utiliser le mode récurrence de votre calculatrice pour calculer les dix premiers termes.
2. Programmer l'algorithme précédent sous Python.

d) Suite définie par un motif géométrique

Exercice 5 : l'escargot Pythagoricien
O désigne un point du plan.
1. On construit un triangle OA_0A_1 rectangle et isocèle en A_0 tel que $OA_0=A_0A_1=1$. Calculer la longueur exacte de OA_1 ?
2. On construit un triangle OA_1A_2 rectangle en A_1 tel que $A_1A_2=1$. Calculer la longueur exacte de OA_2 ?
3. On construit un triangle OA_2A_3 rectangle en A_2 tel que $A_2A_3=1$. Calculer la longueur

exacte de OA_3 ?

4. On poursuit le processus de construction des triangles OA_nA_{n+1}
On créé ainsi une suite (d_n) de nombres définie par $d_n=OA_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. A quel nombre est égal d_{n+1} ?

3. Représentation graphique d'une suite

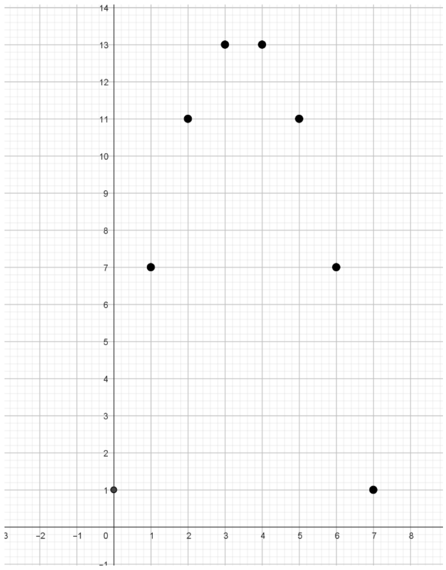
On peut placer les termes d'une suite $A(n;u_n)$ dans un repère (O;I;J) du plan.

Exemple : On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=-n^2+7n+1$

On calcule
On obtient donc les points
$A_0(0;1); A_1(1;7); A_2(2;11)$

$A_3(3;13); A_4(4;13); A_5(11)...$

dans le repère ci dessous.



II. Sens de variation d'une suite

Définition :
- Une suite $(u_n)_n$ est dite croissante si, pour tout n, $u_{n+1}\geqslant u_n$
- Une suite $(u_n)_n$ est dite décroissante si, pour tout n, $u_{n+1}\leqslant u_n$
- Une suite $(u_n)_n$ est dite constante si, pour tout n, $u_{n+1}=u_n$
- Une suite est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Propriété : Lorsqu'une suite $(u_n)_n$ est définie par une relation $u_n=f(n)$ où f est une fonction monotone sur $[0;+\infty[$, la suite (u_n) est également monotone, de même monotonie que la fonction f sur $[0;+\infty[$.

Exercice 6 :
Étudier les variations des suites ci-dessous définies pour tout entier naturel par :

$u_n=4n+(-2)^n$ $\quad v_n=3n^2-n+1$ $\quad w_n=n^2+9n+1$ $\quad \begin{cases} t_0= & 1 \\ t_{n+1}=t_n-(n+1)^2 \end{cases}$