Exercice 1

Dans un restaurant, le coût total en euros pour la fabrication de *x* repas est donné par la relation $C(x)=2x^2-230x+7200$ pour *x* compris entre 30 et 120.

Lorsque *x* repas sont fabriqués, on appelle coût moyen d'un repas le quotient $\frac{C(x)}{x}$.

On note $C_M(x)$ ce coût moyen.

1. Donner une expression plus simple de $C_M(x)$.
2. Combien de repas fat-il fabriquer pour que le coût moyen d'un repas soit minimal ?

Correction

Pour $x\in[30;120]$, $C_M(x)=\frac{2x^2-230x+7200}{x}=2x-230+\frac{7200}{x}$

Étude des variations de C_M .

C_M est la somme algébrique de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc C_M est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donc dérivable sur $[30;120]$.

$$\forall x\in[30;120], C'_M(x)=2+7200\times(\frac{-1}{x^2})=\frac{2x^2-7200}{x^2}=\frac{2(x^2-3600)}{x^2}=\frac{2(x-60)(x+60)}{x^2}$$

Or $\forall x\in[30;120], x^2>0$ et $x+60>0$ donc C'_M est du signe de $x-60$.

Or $x-60\leq 0\Leftrightarrow x\leqslant 60$. On déduit donc le tableau de variation de C_M

On a donc :

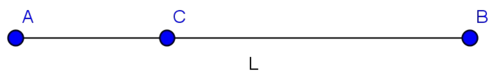
x	30		60		120
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
C_M	70	↘	10	↗	70

D'après le tableau de variation, il faut fabriquer 60 repas pour que le coût moyen soit minimal.

Exercice 2

Dès le IIIème siècle avant J-C, Euclide s'est intéressé à la recherche d'un maximum. Son problème était le suivant : soit un segment [*AB*] ; où faut-il placer un point *C* sur ce segment pour que le produit $AC\times BC$ soit maximal ? Résoudre ce problème.

Correction



Soit *L* la longueur du segment [*AB*] .

Posons *AC* = *x* et *BC* = *L* - *x* d'où $AC\times BC=x(L-x)=-x^2+Lx$

Soit *f* la fonction définie sur $[0;L]$ par $f(x)=-x^2+Lx$.

On va étudier les variations de *f* sur $[0;L]$.

f est la somme algébrique de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0;L]$. $\forall x\in[0;L], f'(x)=-2x+L$.

Etude du signe de $f'(x)$

$$f'(x)\leq 0\Leftrightarrow -2x+L\leqslant 0\Leftrightarrow -2x\leqslant -L\Leftrightarrow x\geqslant\frac{L}{2}$$

On déduit le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{L}{2}$		L
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{L^2}{4}$	$\searrow$	0

Conclusion : f atteint son maximum pour $x=\frac{L}{2}$ donc le produit $AC\times BC$ est maximal lorsque *C* est le milieu de [*AB*].

Exercice 3

Un mobile se déplace sur un axe [*Ox*) gradué en *cm*. On observe son déplacement pendant une durée de 6 secondes. Sa position sur l'axe est donnée, en fonction du temps *t* (en *s*), par la relation $x(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+9t+2$. La vitesse du mobile sera exprimée en $cm.s^{-1}$.

1. En quelle abscisse est positionné le mobile à l'instant *t* = 0 ? On l'appellera position initiale.
2. Au bout de 6 secondes, quelle est sa position finale ?
3. Quelle est la vitesse moyenne du mobile sur l'ensemble de son parcours ?
4. La vitesse instantanée $v(t)$ du mobile à un instant *t* donné correspond à la vitesse moyenne « limite » entre l'instant *t* et l'instant $t+h$ lorsque *h* tend vers 0. Justifier que, pour tout réel $t\in[0;6]$, $v(t)=x'(t)$.
5. Quelle est la vitesse instantanée à l'instant $t=4$?
6. Le mobile s'est-il arrêté un court instant lors de son parcours ?

Correction

1. $x(0)=2$ donc le mobile est 2 cm de l'origine en position initiale.
2. $x(6)=\frac{1}{3}\times 6^3-3\times 6^2+9\times 6+2=20$

   Au bout de 6 secondes, le mobile est à 20 cm de l'origine.

3. $v=\frac{20-2}{6}=\frac{18}{6}=3\,cm.s^{-1}$

   La vitesse moyenne est de $3\,cm.s^{-1}$ sur l'ensemble de son parcours.

4. Pour $t\in[0;6]$ la vitesse moyenne entre les instants *t* et $t+h$ est $\frac{x(t+h)-x(t)}{t+h-t}=\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ donc la vitesse instantanée est $\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$.

   Or la fonction *x* est une somme algébrique de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc *x* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0;6]$ donc cette limite existe et vaut $x'(t)$ ainsi pour tout réel $t\in[0;6]$, $v(t)=x'(t)$.

5. Pour $t\in[0;6]$, $v(t)=x'(t)=t^2-6t+9$ et donc en particulier, $v(4)=4^2-6\times 4+9=1$ donc la vitesse instantanée à l'instant $t=4$ est de $1\,cm.s^{-1}$.

   On cherche t pour que $v(t)=0$

   $v(t)=0\Leftrightarrow t^2-6t+9=0\Leftrightarrow (t-3)^2=0\Leftrightarrow t=3$

   Conclusion : Le mobile s'est arrêté au bout de 3 secondes.

Exercice 4

Une entreprise produit chaque jour entre 1 tonne et 20 tonnes de peinture. Le coût de production de *x* tonnes de peinture, en milliers d'euros, en modélisé par la fonction *C* définie sur l'intervalle $[1;20]$ par $C(x)=0{,}05x^2-0{,}1x+2{,}45$.

En économie, le coût marginal C_m représente l'augmentation du coût engendrée par la production d'une tonne supplémentaire. Ainsi pour *x* tonnes produites on a $C_m(x)=C(x+1)-C(x)$.

1. Calculer le coût marginal $C_m(10)$ pour une production de 10 tonnes, puis $C_m(11)$.
2. Les économistes considèrent que $C'(x)$ est une bonne approximation du coût marginal. Justifier que la fonction *C* est dérivable sur $[1;20]$ et déterminer la fonction C' .
3. En déduire $C'(10)$ et $C'(11)$.
4. Comparer aux résultats de la question 1.

Correction

1. $C(11)=7{,}4$ et $C(10)=6{,}45$ donc $C_m(10)=C(11)-C(10)=7{,}4-6{,}45=0{,}95$
   $C(12)=8{,}45$ donc $C_m(11)=C(12)-C(11)=8{,}45-7{,}4=1{,}05$.
2. *C* est une somme algébrique de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc *C* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[1;20]$. Pour tout $x\in[1;20]$, $C'(x)=0{,}1x-0{,}1$
3. $C'(10)=0{,}1\times10-0{,}1=0{,}9$ et $C'(11)=0{,}1\times11-0{,}1=1$.
4. L'approximation faite est assez proche.