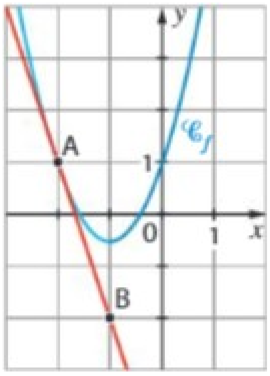
Exercice 1

On considère la représentation graphique C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente T_{-2} en A.

A l'aide de la courbe et en justifiant si besoin, déterminer :

1. $f(-2)$ puis $f'(-2)$
2. l'équation réduite de T_{-2}



Correction

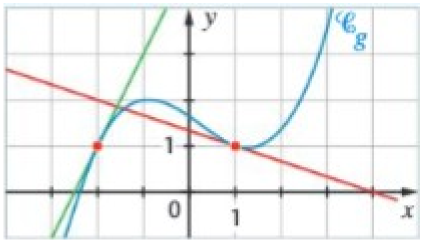
1. $f(-2)=1$ et $f'(-2)=-3$
2. L'équation de T_{-2} est donnée par
   $y=f'(-2)(x-(-2))+f(-2)$
   $y=-3(x+2)+1$
   $y=-3x-6+1$
   $y=-3x-5$

Exercice 2

On considère la représentation graphique C_g d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et ses tangentes T_{-2} et T_1 en $x=-2$ et en $x=1$.

A l'aide de la courbe et en justifiant si besoin, déterminer :

1. $g(-2)$ et $g(1)$
2. $g'(-2)$ et $g'(1)$
3. l'équation réduite des tangentes T_{-2} et T_1 .



Correction

1. $g(-2)=1$ et $g(1)=1$
2. $g'(-2)=2$ et $g'(1)=\frac{-1}{3}$
3. L'équation de T_{-2} est donnée par
   $y=g'(-2)(x-(-2))+g(-2)$
   $y=2(x+2)+1$
   $y=2x+4+1$
   $y=2x+5$

   Conclusion : $T_{-2}: y=2x+5$

L'équation de T_1 est donnée par

$$y=g'(1)(x-1)+g(1)$$
$$y=-\frac{1}{3}(x-1)+1$$
$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}+1$$
$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

Conclusion : $T_1 : y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer l''équation réduite de T .

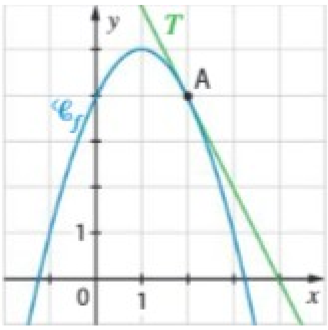


Figure 1

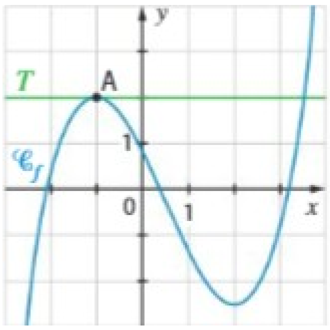


Figure 2

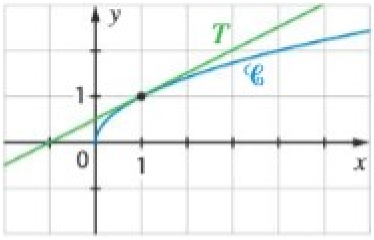
Correction

Figure 1 : T est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées donc admet une équation réduite de la forme $y=mx+p$. Par lecture graphique, on a $m=-2$ donc $y=-2x+p$.
Or $A(2;4)\in T$ donc $4=-2\times 2+p$ donc $p=8$.
On déduit que $T : y=-2x+8$.

Figure 2 : T est une tangente horizontale donc admet une équation réduite de la forme $y=p$.
Par lecture graphique, on a $p=2$.
On déduit que $T : y=2$.

Exercice 4

On considère la représentation graphique de la fonction racine carrée et sa tangente T_1 en $x=1$.



1. Par lecture graphique, déterminer $f'(1)$.
2. Retrouver ce résultat par le calcul à 'aide du taux de variation.
3. Retrouver ce résultat par le calcul à 'aide de la fonction dérivée de la fonction.
4. Déterminer, par le calcul, l'équation réduite de la tangente T_4 à la courbe en $x=4$.
5. Existe-t-il une tangente à la courbe parallèle à la droite (d) d'équation $y=2x-5$. Si oui, déterminer son équation réduite.

Correction

1. $f'(1)=\frac{1}{2}$
2. Soit $h\in\mathbb{R}, h\neq 0$. Le taux d'accroissement de la fonction f entre 1 et $1+h$ vaut :
$$r(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}=\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$
$$r(h)=\frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{1}{(\sqrt{1+h}+1)}$$ d'où $\lim_{h\to 0} r(h)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{1}{2}$

   Conclusion : f est dérivable en 1 et $f'(1)=\frac{1}{2}$.
3. La fonction $f:x\to f(x)\sqrt{x}$ est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$.
4. L'équation de T_4 est donnée par

   $y=f'(4)(x-4)+f(4)$. Or $f'(4)1\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ et $f(4)\sqrt{4}=2$ d'où :

   $y=\frac{1}{4}(x-4)+2$

   $y=\frac{1}{4}x-1+2$

   $y=2x+5$

   Conclusion : $T_4 : y=\frac{1}{4}x+1$
5. Le coefficient directeur de (d) vaut 2.
   Il existe une tangente à C_f parallèle à (d) si et seulement si il existe un réel $x>0$ tel que $f'(x)=2$.

   $f'(x)=2\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}=2\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{1}{16}$

   Or $f(\frac{1}{16})=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$.

On déduit que :

$T_{\frac{1}{16}} : y = 2(x - \frac{1}{16}) + \frac{1}{4}$

$T_{\frac{1}{16}} : y = 2x - \frac{1}{8} + \frac{2}{8}$

$T_{\frac{1}{16}} : y = 2x + \frac{1}{8}$

Conclusion : $T_{\frac{1}{16}} : y = 2x + \frac{1}{8}$