

Exercice 1

On considère la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x^2 - 4x + 1$.

1. Calculer $f'(-1)$ à l'aide du taux d'accroissement.
2. Retrouver ce résultat à l'aide de la fonction dérivée $f'(x)$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-1} à C_f au point d'abscisse -1 .
4. Déterminer les tangentes éventuelles à C_f parallèles à la droite $(d): y = -2x + 7$.

Exercice 2

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $g(x) = \frac{2}{4-x}$.

1. Calculer $g'(3)$ à l'aide du taux d'accroissement.
 2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_3 à C_g au point d'abscisse 3 .
 3. Déterminer les tangentes éventuelles à C_g parallèles à la droite $(d): y = 2x + 5$.
-

Correction

Exercice 1

On considère la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x^2 - 4x + 1$.

1. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{[-3(-1+h)^2 - 4(-1+h) + 1] - (-3 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 1)}{h} = \frac{-3(1-2h+h^2) + 4 - 4h + 1 - 2}{h}$$

$$T(h) = \frac{-3 + 6h - 3h^2 + 4 - 4h + 1 - 2}{h} = \frac{-3h^2 + 2h}{h} = \frac{h(-3h+2)}{h} = -3h+2$$

d'où $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} -3h+2 = 2 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en $a = -1$ et $f'(-1) = 2$.

2. f est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -6x - 4$ donc $f'(-1) = -6 \times (-1) - 4 = 6 - 4 = 2$. on retrouve le résultat du 1.

3. $T_{-1}: y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$$T_{-1}: y = 2(x+1) + 2$$

$$T_{-1}: y = 2x + 2 + 2$$

$$T_{-1}: y = 2x + 4$$

4. Le coefficient directeur de $(d): y = -2x + 7$ vaut $m = -2$.

C_f admet une tangente parallèle à (d) en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f'(a) = -2$.

$$f'(a) = -2 \Leftrightarrow -6a - 4 = -2 \Leftrightarrow -6a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

Conclusion : C_f a une seule tangente parallèle à $(d): y = -2x + 7$, en $a = -\frac{1}{3}$.

Exercice 2

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $g(x) = \frac{2}{4-x}$.

1. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{\frac{2}{4-(3+h)} - \frac{2}{4-3}}{h} = \frac{\frac{2}{1-h} - 2}{h} = \frac{2-2(1-h)}{1-h} = \frac{2-2(1-h)}{1-h} = \frac{2h}{1-h} = \frac{2h}{1-h} \times \frac{1}{h} = \frac{2}{1-h}$$

d'où $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1-h} = 2 \in \mathbb{R}$ donc g est dérivable en $a = 3$ et $g'(3) = 2$.

2. $T_3: y = g'(3)(x-3) + g(3)$

$$T_3: y = 2(x-3) + 2$$

$$T_3: y = 2x - 6 + 2$$

$$T_3: y = 2x - 4$$

3. Le coefficient directeur de $(d): y = 2x + 5$ vaut $m = 2$.

Le coefficient directeur de la tangente à C_g en $a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ vaut $g'(a) = 2 \times \frac{-(-1)}{(4-a)^2} = \frac{2}{(4-a)^2}$.

C_g admet une tangente parallèle à (d) en $a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ si et seulement si $g'(a) = 2$.

$$g'(a) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{(4-a)^2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2(4-a)^2 \Leftrightarrow (4-a)^2 = 1 \Leftrightarrow 4-a = 1 \text{ ou } 4-a = -1$$

$$g'(a) = 2 \Leftrightarrow -a = 1-4 = -3 \text{ ou } -a = -1-4 = -5 \Leftrightarrow a = 3 \text{ ou } a = 5$$

Conclusion : C_g a deux tangentes parallèles à $(d): y = -2x + 7$, l'une en $a = 3$ et l'autre en $a = 5$.