Chapitre 4 : Nombres complexes conjugués

I. Nombres complexes conjugués

1. Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Le conjugué du nombre complexe $z=\text{Re}(z)+i\,\text{Im}(z)$ est le nombre complexe noté $\overline{z}=\text{Re}(z)-i\,\text{Im}(z)$.

Remarque : autrement dit, le nombre complexe conjugué du nombre complexe $z=a+i\,b$ *est le nombre complexe* $z=a-ib$.

Exercice 1 :
Déterminer les conjugués des nombres complexes :

$$z_1=3-2i \qquad z_2=5 \qquad z_3=4i \qquad z_1=9i-5$$

Propriétés : Pour tout nombre complexe z , on a :

- $\overline{\overline{z}}=z$
- $z+\overline{z}=2\,\text{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=2\,i\,\text{Im}(z)$
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=z$
- $z\in i\,\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=-z$
- $z\times\overline{z}=(\text{Re}(z))^2+(\text{Im}(z))^2$

Preuve : Notons $z=a+ib$ *. On a :*

- $\overline{\overline{z}}=\overline{a-ib}=a+ib=z$
- $z+\overline{z}=(a+ib)+(a-ib)=2\,a$
- $z-\overline{z}=(a+ib)-(a-ib)=a+ib-a+ib=2i\,b$
- $z=\overline{z}\Leftrightarrow a+ib=a-ib\Leftrightarrow 2ib=0\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow z=a\Leftrightarrow z\,réel$
- $z=-\overline{z}\Leftrightarrow a+ib=-(a-ib)\Leftrightarrow a+i\,b=-a+ib\Leftrightarrow 2\,a=0\Leftrightarrow a=0\Leftrightarrow z=ib\Leftrightarrow z$ imaginaire pur
- $z\times\overline{z}=(a+ib)\times(a-ib)=a^2-i\,ab+iba-i^2b^2=a^2+b^2$ avec $i^2=-1$

#

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$2\overline{z}+5-2i=4+i+3\overline{z}$ $\qquad$ $2z+i\overline{z}=5-2i$

2. Inverse et quotient

Définition : Soit $z=a+ib$ un nombre complexe non nul.

L'inverse de z est le nombre complexe z' tel que $zz'=1$. On le note $\frac{1}{z}$. On a :

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Exercice 3 : Calculer $\frac{1}{i}$ et $\frac{1}{1+2i}$.

Définition : Soit $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ deux nombres complexes avec $z'\neq 0$.

Le quotient de z par z' est le nombre complexe noté $\frac{z}{z'}$ tel que $\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z'}$. On a :

$$\frac{z}{z'}=\frac{a+ib}{a'+ib'}=\frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')}=\frac{(a+ib)(a'-ib')}{a'^2+b'^2}=\frac{z\times\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$$

Exercice 4 : Calculer $\frac{1+i}{2i-3}$.

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(1+2i)z=3+i$
2. $(3+i)\overline{z}-2+4i=0$
3. $(1+i)z+(3-i)\overline{z}=2-6i$

3. Conjugués et opérations

Propriété: Soit z et z' deux nombres complexes et n un nombre entier relatif. On a :

- $z+\overline{z}=2\mathrm{R}e(z)$
- $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
- si $z\neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$
- si $z'\neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$ avec $z\neq 0$ lorsque $n<0$

Preuve :
On note $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$.

- $\overline{z+z'}=\overline{(x+x')+i(y+y')}=(x+x')-i(y+y')=(x-iy)+(x'-iy')=\overline{x+iy}+\overline{x'+iy'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{z\times z'}=\overline{(xx'-yy')+i(xy'+x'y)}=(xx'-yy')-i(xy'+x'y)=(x-iy)(x'-iy')=\overline{z}\times\overline{z'}$
- $\overline{1}=\overline{\left(\frac{1}{z}\right)\times z}=\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}\times\overline{z}$ *donc* $\frac{\overline{1}}{\overline{z}}=\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ *donc* $\frac{1}{\overline{z}}=\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\overline{z\times\frac{1}{z'}}=\overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\overline{z}\times\frac{1}{\overline{z'}}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- *Démontrons par récurrence sur* $n\in\mathbb{N}$ *que* $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
Initialisation :
Pour $n=0$ *on a* $\overline{z^0}=\overline{1}=1$ *et* $\overline{z}^0=1$ *donc la propriété est vraie au rang* $n=0$.
Hérédité :
Hypothèse de récurrence :
On suppose qu'il existe un rang $n\geqslant 0$ *pour lequel* $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
au rang suivant, $n+1$ *, on a* $\overline{z^{n+1}}=\overline{z^n\times z}=\overline{z^n}\times\overline{z}=\overline{z}^n\times\overline{z}=\overline{z}^{n+1}$
donc la propriété est encore vraie au rang $n+1$.
La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire donc vraie pour tout entier naturel n .
Le cas $n<0$ *traite à laide de l'égalité* $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ avec $z\neq 0$ #

Exercice 6 : Calculer $z_1=\overline{(1-2i)(2+3i)}, z_2=\overline{(\frac{i}{1+i})}$ et $z_3=\overline{(i^3)}$.

Exercice 7 : Calculer le conjugué de $z=\frac{(3+2i)(1-i)}{(1+2i)^2}$.

Exercice 8 : A l'aide des propriétés sur les conjugués, démontrer que $z+z'$ est un réel et $z-z'$ est un imaginaire pur avec $z=\frac{-2+5i}{3-2i}$ et $z'=\frac{-2-5i}{3+2i}$.