Chapitre 4 : Pourcentages

I. A quoi servent les pourcentages ?

On utilise les pourcentages dans deux situations différentes :

→ Soit pour exprimer le rapport d'une partie à un tout.
Par exemple, 60% des élèves de la classe habitent Cherbourg.

→ Soit pour exprimer une évolution.
Par exemple, il y a 10% d'élèves de la classe en plus à suivre la spécialité Maths par rapport à l'an dernier.

II. Pourcentages d'une grandeur

1. Proportion d'une grandeur

Exemple : Dans une classe de 35 élèves, 14 élèves sont externes.

- La proportion des externes dans cette classe est donc $\frac{14}{35}=\frac{2}{5}$
- Cette proportion exprimée en pourcentage est donc $\frac{14}{35}\times 100=40\,\%$

Définition : La proportion t, <u>en pourcentage</u>, d'une quantité B par rapport à une quantité A est égale à

$$\boldsymbol{t=\frac{B}{A}\times 100}$$

Exercice 1 : Dans cette même classe de 35 élèves, 20% d'entre eux suivent l'option « Italien ».
Combien d'élèves suivent cette option ?

Propriété : Prendre t% d'une quantité A c'est en prendre $\boldsymbol{B=\frac{t}{100}\times A}$

Démonstration: $t=\frac{B}{A}\times 100 \Leftrightarrow B=\frac{t}{100}\times A$ #

Exercice 2 : Le ministère de la santé a réalisé un sondage sur le régime alimentaire de 1200 personnes.
180 d'entre elles déclarent être végan et 36 % déclarent suivre un régime pour maigrir.

1. Quelle est la proportion des personnes végan ?
2. Combien de personnes suivent un régime pour maigrir ?

2. Pourcentage de pourcentage

Exemple : Dans une classe de 30 élèves, 60% des élèves travaillent dont 50% avec plaisir.

Déterminons la proportion des élèves dans cette classe qui travaillent avec enthousiasme :
→ Grâce aux effectifs : le nombre d'élèves de cette classe qui :

- o travaillent : $\frac{60}{100}$ x 30 = 0,60×30 = 18
- o travaillent avec plaisir : $\frac{50}{100}$ x 18 = 0,50×18 = 9

Donc la part des élèves dans cette classe qui travaillent avec enthousiasme est $\frac{9}{30}$, soit 30%.

→ Grâce aux pourcentages :

$$\frac{50}{100}\times\frac{60}{100}=\frac{50\times 60}{100\times 100}=\frac{3000}{100\times 100}=\frac{30}{100}=30\,\%$$

Remarque : on put aussi calculer ainsi $\frac{50}{100}\times\frac{60}{100}=0{,}5\times 0{,}6=0{,}3=\frac{30}{100}=30\,\%$

Propriété : Prendre y% de x% d'une grandeur revient à prendre directement $\mathbf{\frac{xy}{100}}$ **%**

Démonstration :

- prendre x % de A est égal à B = $\frac{x}{100}\times A$
- prendre y % de B est égal à C = $\frac{y}{100}\times B$
- donc C = $\frac{y}{100}\times\frac{x}{100}\times A=\frac{xy}{100\times 100}\times A=\frac{\frac{xy}{100}}{100}\times A$ donc C représente $\frac{xy}{100}\%$ de A #

Exercice 3 : Dans une société d'informatique, 60 % déclarent partir en vacances en août et 15 % d'entre eux déclarent partir à la montagne.
Quelle proportion des salariés de cette entreprise partent en vacances en août à la montagne ?

III. Pourcentage d'évolution

1. Evolution en pourcentage

Exemples

- Augmentation : En bourse, à la fin de l'année 1996, la valeur d'une action est 137,10 €. En un an, elle augmente de 10 %.
  Valeur de cette action fin 1997 = le prix initial + l'augmentation
  $$= 137{,}10 + \frac{10}{100} \times 137{,}10 = 137{,}10 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 137{,}10 \times 1{,}1 = 150{,}81 \text{ €}$$
  Pour obtenir la valeur finale, on a donc multiplié la valeur initiale par le coefficient multiplicateur 1,1.

- Diminution : La tour Eiffel a une hauteur de 320 mètres mais on estime que par grand froid cette hauteur peut diminuer de 0,05 %.
  Hauteur, par grand froid, de la tour Eiffel = Hauteur de base – la diminution
  $$= 320 - \frac{0{,}05}{100} \times 320 = 320 \times \left(1 - \frac{0{,}05}{100}\right)$$
  $$= 320 \times 0{,}9995 = 319{,}84$$

  Pour obtenir la valeur finale, on a donc multiplié la valeur initiale par le coefficient multiplicateur 0,9995.

Propriété et définition :

- **Augmenter une grandeur de t%** revient à la multiplier par le **coefficient multiplicateur** (CM) $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$. Dans le cas d'une augmentation ou hausse, ce CM est strictement supérieur à 1.

- **Diminuer une grandeur de t%** revient à la multiplier par le **coefficient multiplicateur** (CM) $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$. Dans le cas d'une diminution ou baisse, ce CM est strictement inférieur à 1.

Démonstration :
Notons A l'ancienne valeur et B la nouvelle valeur

- Nouvelle valeur après augmentation de t % = ancienne valeur + augmentation
  $$B = A + \frac{t}{100} \times A = A \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$$
- Nouvelle valeur après diminution de t % = ancienne valeur – diminution
  $$B = A - \frac{t}{100} \times A = A \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$$ #

Exercice 4 : Sur une canette de soda dite allégée en sucre, il est écrit « -15 % de sucre ! ».
Quel est le coefficient multiplicateur à utiliser pour déterminer le nombre de grammes de sucre présents dans cette canette allégée connaissant le nombre de grammes de sucre dans une canette dite « classique » ? Justifier votre réponse.

Exercice 5 :La semaine dernière, un cinéma a réalisé 480 entrées le lundi et 450 entrées le mardi.
Le nombre de spectateurs a diminué de 12 % entre mardi et mercredi puis augmenté de 25% entre mercredi et jeudi.

1. Quel est le pourcentage de diminution entre le lundi et le mardi ?
2. Combien d'entrées le cinéma a-t-il enregistré le mercredi ?
3. Combien d'entrées le cinéma a-t-il enregistré le jeudi ?
4. Quel est le pourcentage d'évolution entre le lundi et le jeudi ?

2. Evolution réciproque

Exemple : Un article vient de baisser de 20 %.
De quel pourcentage devrait-il être augmenté pour retrouver son prix initial ?

Soit P son prix initial. Son nouveau prix, P', après réduction est donc P' = $(1 - \frac{20}{100}) \times P$

Soit t son % d'augmentation pour revenir à son prix initial P.

On aura alors $P' \times (1 + \frac{t}{100}) = P$ donc $(1 - \frac{20}{100}) \times P \times (1 + \frac{t}{100}) = P$ donc $1+\frac{t}{100}=\frac{1}{1-\frac{20}{100}}$

Propriété et définition : Si le taux d'évolution d'une valeur initiale V_0 à une valeur V_1 est t % , alors le **taux d'évolution réciproque** t' % de V_1 à V_0 vérifie :

$$1+\frac{t'}{100}=\frac{1}{1+\frac{t}{100}}$$

Démonstration : identique à l'exemple précédent en remplaçant 20 % pat t % #

Exercice 6 : calculer la valeur de t dans l'exemple précédent. Qu'observez-vous ?

3. Calcul du taux de variation en pourcentage

Exemple : De 1940 à 1985, la population du Mexique est passée de 19,4 millions d'habitants à 79,7 millions. Il y a deux méthodes pour calculer le taux de variation de cette augmentation en pourcentage :

1ère méthode :

$$Taux\,de\,variation=\frac{augmentation}{population\ initiale}=\frac{population\ finale-population\ initiale}{population\ initiale}=\frac{79,7-19,4}{19,4}=3,11$$

2ème méthode :

$$coefficient\ multiplicateur=\frac{population\ finale}{population\ initiale}=\frac{79,7}{19,4}=4,11\,donc\ Taux\,de\,variation=4,11-1=3,11$$

La population a donc augmenté d'environ 311% entre 1940 et 1985.

Propriété et définition :

- Lorsqu'on passe d'une valeur V_0 à une valeur V_1 , le taux d'évolution ou Variation Relative est

$$t=\frac{V_1-V_0}{V_0}=\frac{V_1}{V_0}-1=CM-1$$

- On appelle Variation Absolue nombre **ΔV = NV – AV** (exprimée en termes de points si les quantités sont exprimées en pourcentages)

- Si $t < 0$, il s'agit d'une baisse

- Si $t > 0$, il s'agit d'une hausse

Remarque : le taux d'évolution peut aussi s'exprimer en pourcentage. Auquel cas, on a :

$$t=\frac{V_1-V_0}{V_0}\times 100=\frac{V_1}{V_0}-1\times 100=(CM-1)\times 100$$

4. Augmentations ou diminutions successives

Exemple 1 : augmentations successives.
De janvier à juin 2014, le prix d'un certain produit a augmenté de 2% ; de juillet à décembre 2014, il subit une nouvelle augmentation de 3%. Il ne faut pas en conclure que le prix de ce produit a augmenté de 5% durant l'année 2014 ! Voici pourquoi :

Imaginons que le produit coûte 100€ début 2014.
→ Son prix après l'augmentation de 2% est de 100 × 1,02 = 102€.
→ Son prix après l'augmentation de 3% est de 102 × 1,03 = 105,06€.

Son prix est donc passé à

105,06 = 102 x 1,03 = (100 x 1,02) x 1,03 = 100 x (1,02 x 1,03) = 100 x **1,0506** = 100 x (1 + $\frac{\mathbf{5,06}}{\mathbf{100}}$)

Le coefficient multiplicateur est 1,0506. L'augmentation est donc de 5,06 % et non pas de 5 % !

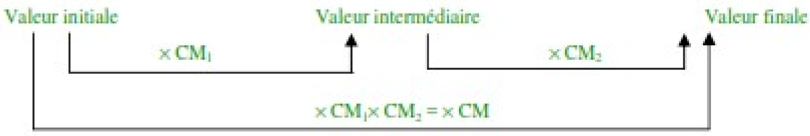
Exemple 2 : augmentation et diminution identiques successives, et inversement.
Un produit augmente de 10%, puis diminue de 10%. Il ne faut pas en conclure que ce produit est revenu à son prix initial! Voici pourquoi :

Imaginons que le produit coûte 100 €.
→ Son prix après l'augmentation de 10% est de 100 × 1,1 = 110 €
→ Son prix après la diminution de 10% est de 110 × 0,9 = 99 €
Il coûte donc moins qu'initialement !

Propriété :
Lorsqu'une grandeur subit des évolutions successives (hausses ou baisses), le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution :

$$CM_{global} = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times ....$$

Démonstration :



Remarques :

1. En pourcentages, les augmentations ou les baisses successives ne s'ajoutent pas.
2. Une augmentation de t% suivie d'une baisse de t%, et inversement, ne se compensent pas; ça conduit toujours à une baisse !

Exercice 7 : Dans une grande surface, le prix du café augmente de 20 %, puis diminue de 15 %. déterminer le taux d'évolution global du prix du café.