

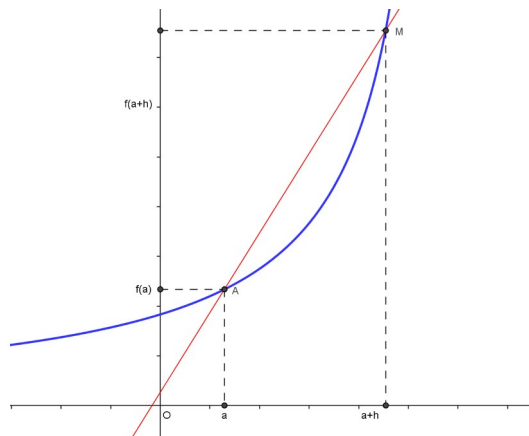
Chapitre 3 : Dérivation

I. Nombre dérivé et tangente

f désigne une fonction définie sur un intervalle I , C_f sa représentation graphique dans un repère du plan et $A(a ; f(a))$ un point de C_f d'abscisse a .

Soit h un nombre réel non nul et $M(a+h ; f(a+h))$ un point de C_f .

On se demande quelle position prend la droite (AM) lorsque M se rapproche de plus en plus de A c'est à dire ce que devient le coefficient directeur $r(h)$ lorsque h se rapproche de plus en plus de 0.



1. Taux d'accroissement

Le coefficient directeur de la droite (AM) est :

$$r(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition : $r(h)$ est aussi appelé le **taux d'accroissement** de la fonction f entre a et $a+h$.

2. Nombre dérivé de f en a

$r(0)$ n'existe pas mais on veut savoir ce que devient le coefficient directeur $r(h)$ de la droite (AM) quand h se rapproche de plus en plus de zéro. On dira qu'on s'intéresse à la limite de $r(h)$ quand h tend vers zéro et on écrira cette limite sous la forme $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)$.

Définition :

- si $r(h)$ tend vers un **nombre réel** quand h tend vers 0, on dit que f est **dérivable en a** .
- Ce nombre est appelé le **nombre dérivé de f en a** . Il est noté $f'(a)$. On écrit

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exercice 1 :

Soit $f : x \mapsto 3x^2$. f est-elle dérivable en 2 ? Si oui, quel est son nombre dérivé en 2 ?

Exercice 2 :

Soit $f : x \rightarrow |x|$. f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + x$

1. Montrer que f est dérivable en 1 et calculer son nombre dérivé en 1.
2. Vérifier votre résultat à la calculatrice
 CASIO : RUN-MAT + F4 + (d/dx)
 TI : MODE CALCUL + math puis 8 (nombre dérivé)

3. Tangente en un point à une courbe

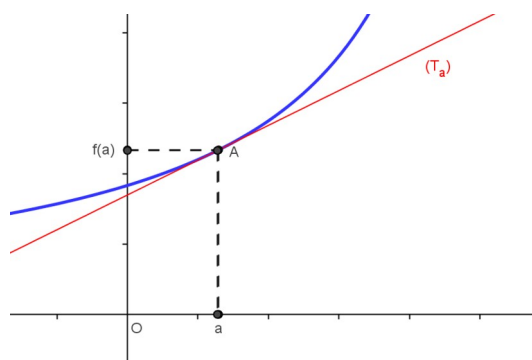
Graphiquement, lorsque h tend vers 0, le point M de C_f se rapproche de plus en plus près de A . Dire que $r(h)$ a pour limite $f'(a)$ quand h tend vers 0 revient à dire que le coefficient directeur de (AM) tend vers $f'(a)$ quand M se rapproche de A sur C_f .

Définition : si f est dérivable en a , on appelle **tangente** (T_a) en A à la courbe C_f la droite qui passe par A et de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

Propriété : une **équation de la tangente** (T_a) peut s'écrire $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Démonstration exigible au programme :

f est dérivable en a donc $f'(a)$ est un nombre réel donc (T_a) admet une équation réduite de la forme $y = ax + b$. Or $A(a; f(a)) \in (T_a)$ donc $f(a) = f'(a) \times a + b$ donc $b = f(a) - a \times f'(a)$;
 On déduit que $(T_a) : y = f'(a)x + f(a) - af'(a) = f'(a)(x - a) + f(a)$ #



Exercice 4 :

On considère la fonction f précédente définie par $f(x) = x^2 + x$

1. Tracer la courbe représentative de f notée (C) et sa tangente (T) au point A d'abscisse 1
2. Déterminer une équation de (T)

II. Fonction dérivée

1. Fonction dérivée d'une fonction donnée

Définition :

- si f est dérivable en tout point d'un intervalle I , on dit que f est dérivable sur I
- la fonction $f : x \rightarrow f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f et notée f' .

2. Dérivées des fonctions usuelles

fonction	f	Définie et dérivable sur...	f'
(1) constante	$f(x) = b$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
(2) linéaire	$f(x) = ax$	\mathbb{R}	$f'(x) = a$
(3) affine	$f(x) = ax + b$	\mathbb{R}	$f'(x) = a$
(4) carré	$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
(5) cube	$f(x) = x^3$	\mathbb{R}	$f'(x) = 3x^2$
(6) puissance (n est un entier relatif non nul)	$f(x) = x^n$	\mathbb{R} si $n \in \mathbb{N}^*$ \mathbb{R}^* si $n \in \mathbb{Z}^*, n < 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$
(7) inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
(8) racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	définie sur $[0; +\infty[$ dérivable sur $]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstrations exigibles au programmes :

- Démontrons que la fonction carré est dérivable sur \mathbb{R} et calculons sa dérivée.
Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$r(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$$

On déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2x+h = 2x \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable sur \mathbb{R}
 et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$

#

- Démontrons que la fonction inverse est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculons sa dérivée

Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{On a } r(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{xh(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

On déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable sur \mathbb{R}^*

et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ #

- Démontrons que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Soit $h \in \mathbb{R}, h > 0$. On a $r(h) = \frac{\sqrt{h+0} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$.

Or $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}}$ n'existe pas car plus h se rapproche de 0, plus \sqrt{h} se rapproche aussi de 0

et plus $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient grand donc ne tend pas vers un nombre réel.

On déduit que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. #

##

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$

- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse 1
- Tracer (T) et (C)
- Existe-t-il une tangente à (C) parallèle à la droite (d) d'équation $y = 3x - 4$?
Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact.

III. Dérivées et opérations

u et v désignent deux fonctions définies sur un même intervalle I.

intitulé	fonction	Définie et dérivable sur...	dérivée
(1) somme de 2 fonctions	$u+v$	I	$u'+v'$
(2) produit d'une fonction par un scalaire	au	I	au'
(3) produit de deux fonctions	$u \times v$	I	$u'v+v'u$
(4) carré d'une fonction	u^2	I	$2uu'$
(5) inverse d'une fonction	$\frac{1}{u}$	I et $u(x) \neq 0$	$\frac{-u'}{u^2}$
(6) quotient de deux fonctions	$\frac{u}{v}$	I et $v(x) \neq 0$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
(7) racine carrée d'une fonction	\sqrt{u}	Définie sur I et $u(x) \geq 0$ Dérivable sur I et $u(x) > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Démonstration exigible au programme :

- Démontrons que $(u \times v)' = u'v + v'u$

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ tel que $x+h \in I$. On a :

$$r(h) = \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$r(h) = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$r(h) = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h} + \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$r(h) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} u(x)$$

On déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} u(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

donc uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + v'u$

#

Exercice 6 :

1. Calculer la dérivée de la fonction p définie sur \mathbb{R} par $p(x) = -2x^4 + 5x^3 - 2x + 3$
2. Soit u et v les fonctions définies sur \mathbb{R} par $u(x) = -2x - 1$ et $v(x) = x^2 + 1$
Calculer les dérivées de uv, de u^2 et de $\frac{1}{v}$.
3. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x-3}{7} \text{ sur } \mathbb{R} \qquad g(x) = \frac{2x-3}{x+1} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Exercice 7 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$	$g(x) = (x^3 + 5)(x^2 + 3)^2$	$h(x) = \sqrt{x^2 + 7x}, x > 0$	$k(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}, x > 1$
--------------------------------------	-------------------------------	---------------------------------	--------------------------------------

IV. Signe de la dérivée et variations d'une fonction

1. Sens de variation

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est **croissante** sur I alors sa dérivée f' est **positive** sur I
- Si f est **décroissante** sur I alors sa dérivée f' est **négative** sur I
- Si f est **constante** sur I alors sa dérivée f' est **nulle** sur I

Démonstration : (dans le cas où f est croissante)

On considère un réel h tel que x+h appartienne à I.

- Si h>0 alors pour tout x de I, x+h > x et comme f est croissante, f(x+h) > f(x) donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$

- Si h<0 alors pour tout x de I, x+h < x et comme f est croissante, f(x+h) < f(x) donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$

Ainsi, quel que soit h, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ soit encore $f'(x) \geq 0$ #

Propriété réciproque : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la dérivée f' est **positive** sur I alors f est **croissante** sur I
- Si la dérivée f' est **négative** sur I alors f est **décroissante** sur I
- Si la dérivée f' est **nulle** sur I alors f est **constante** sur I

Démonstration admise #

Remarque : l'étude du signe de la dérivée d'une fonction permet donc de donner le sens de variation de cette fonction. On représente le signe de $f'(x)$ et les variations de f dans un tableau appelé tableau de variations de la fonction f .

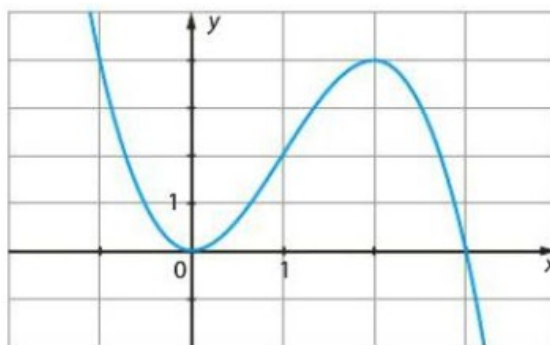
Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 6x + 1$.

Déterminer les variations de f sur \mathbb{R}

Exercice 9 :

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et dont on connaît la représentation graphique ci-dessous :



1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de f sur \mathbb{R}
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R}

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie sur $[-1;3]$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

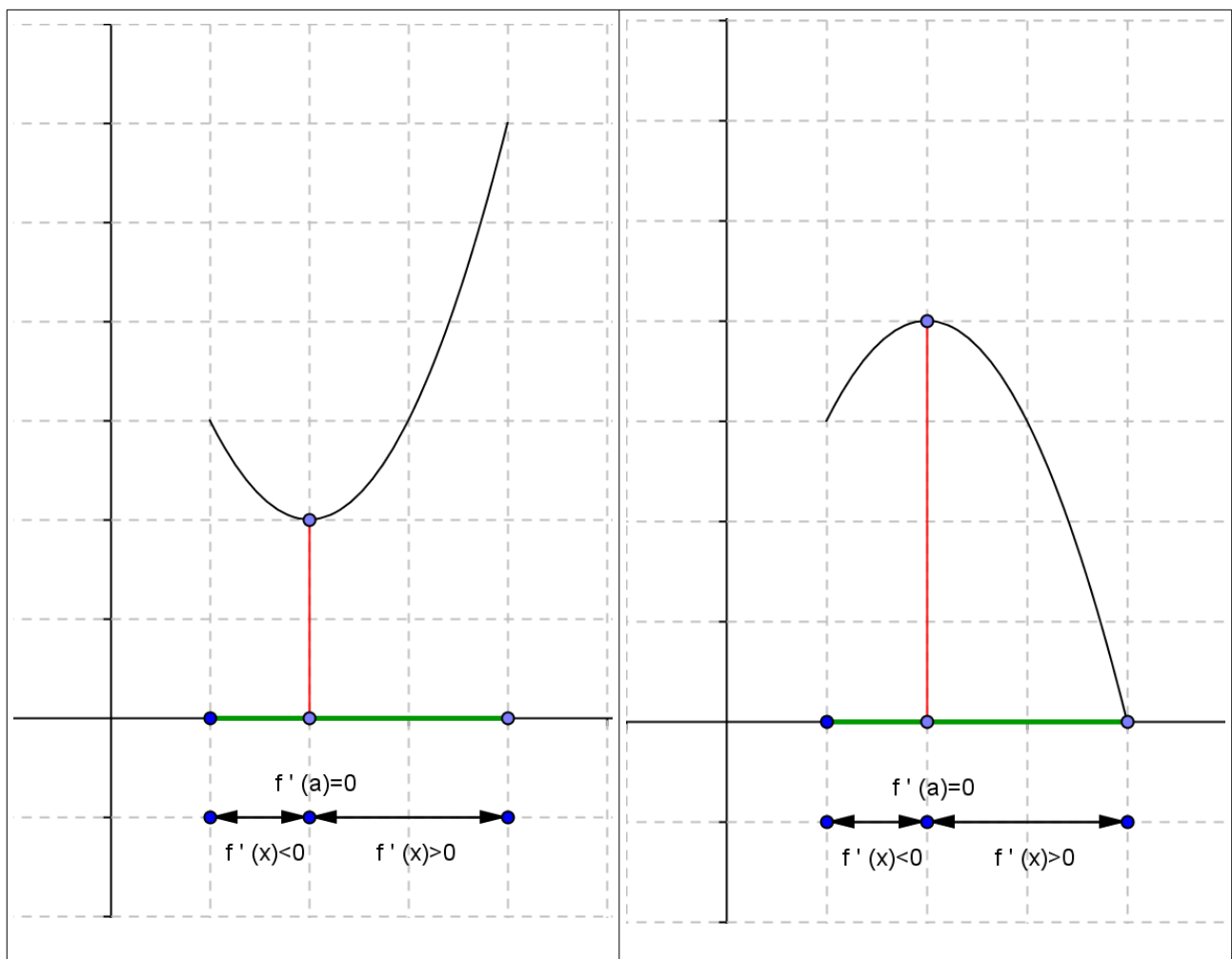
1. Calculer la dérivée de f et déterminer le signe de cette dérivée.
2. (a) Étudier le sens de variation de f sur $[-1;3]$ et construire son tableau de variations
(b) Vérifier la cohérence du résultat avec votre calculatrice

V. Extremum d'une fonction

Propriété : soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel appartenant à I . Si la dérivée f' s'annule en changeant de signe en a , alors la fonction admet un **extremum local** en a .

Remarque : cet extremum peut être un maximum ou un minimum. Deux cas sont possibles :

x	a			x	a		
$f'(x)$	-	0	+	$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	 minimum			 maximum			



Remarque : l'hypothèse du changement de signe de f' en a est nécessaire.

La fonction $x \rightarrow x^3$ n'admet pas d'extremum sur \mathbb{R} et pourtant elle a une dérivée qui s'annule en $x=0$ (mais sa dérivée ne change pas de signe).

Cas particulier : trinôme du second degré

Propriété : soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec a,b et c réels et $a \neq 0$.

Cette fonction admet en $x = \frac{-b}{2a}$ un minimum si $a > 0$, un maximum si $a < 0$.

Démonstration :

La dérivée de f est $f'(x)=2ax+b$.

1^{er} cas : on suppose $a > 0$

$2ax+b \geq 0 \Leftrightarrow 2ax \geq -b \Leftrightarrow x \geq \frac{-b}{2a}$ donc $f'(x)$ change de signe en $x = \frac{-b}{2a}$, plus précisément, $f'(x)$

est négative puis positive donc f présente un minimum en $x = \frac{-b}{2a}$

2^{ème} cas : on suppose $a < 0$

$2ax+b \geq 0 \Leftrightarrow 2ax \geq -b \Leftrightarrow x \leq \frac{-b}{2a}$ car $a < 0$ donc $f'(x)$ change de signe en $x = \frac{-b}{2a}$, plus précisément,

$f'(x)$ est positive puis négative donc f présente un maximum en $x = \frac{-b}{2a}$

#

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $[-2;4]$ par $f(x)=x^3-1,5x^2-6x+2$

1. Tracer la représentation graphique de f sur la calculatrice
Par lecture graphique, en quelle valeur x , f semble-t-elle admettre un minimum ?
2. (a) Calculer la dérivée de f sur $[-2;4]$
(b) Déterminer les extremums de f sur $[-2;4]$
(c) Déterminer un encadrement de $f(x)$ sur $[-2;4]$

Exercice 12 :

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x)=x^3-3x+2$

1. Construire le tableau de variations de h sur \mathbb{R} et en déduire le signe de h sur $[-1;+\infty[$
2. Calculer $h(-2)$ et en déduire le signe de h sur $]-\infty;-2]$.
3. Démontrer que, pour tout x de sur $[-2;+\infty[$, $x^3 \geq 3x-2$