

La calculatrice est interdite

Exercice 1

Trouver une racine évidente de l'équation $x^2+5x+4=0$ et en déduire l'autre solution sans calculer le discriminant.

Exercice 2

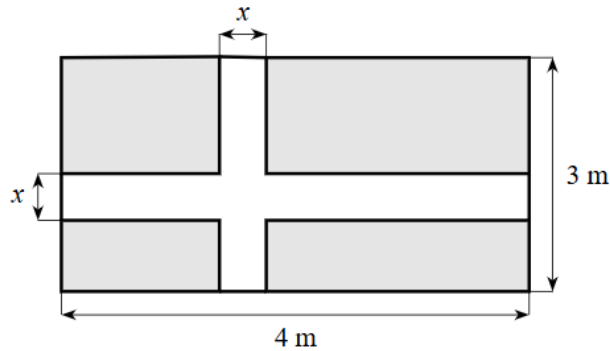
Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{R}, m \neq 1$, l'équation $E_m: (m-1)x^2 - 2x + 1 - m = 0$ a deux solutions distinctes x_1 et x_2 de signes contraires.

Exercice 3

1. Résoudre l'équation $x^2+7x+12=0$ dans \mathbb{R} .
2. Résoudre l'inéquation $-2x^2-x+4 < 0$ dans \mathbb{R} .

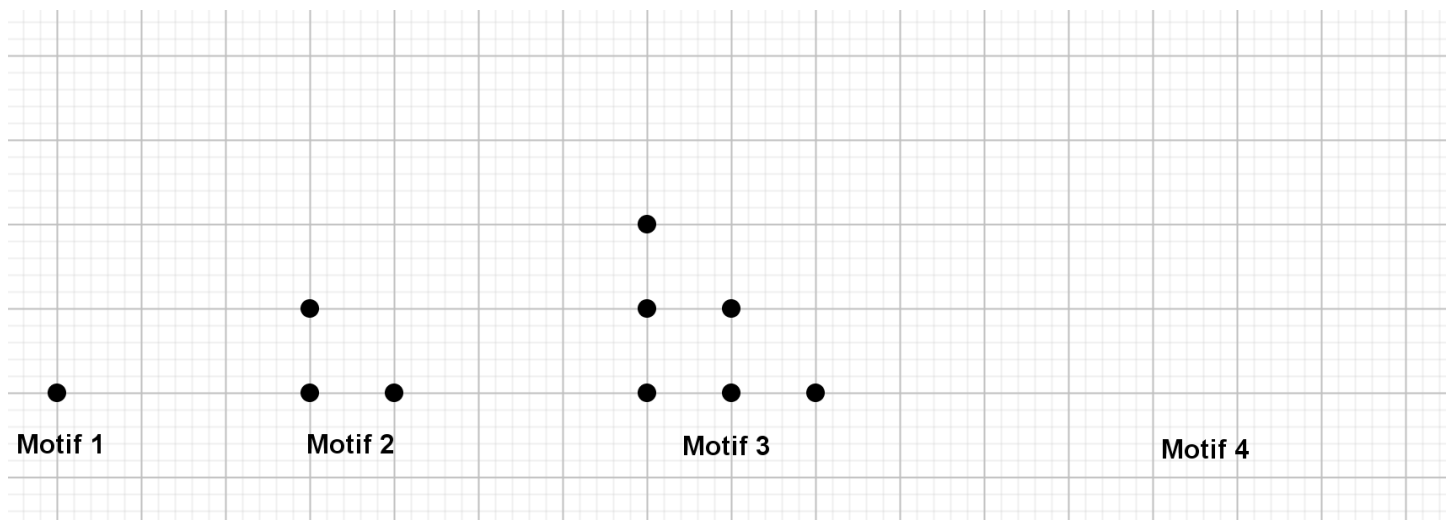
Exercice 4

Quelle largeur x doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau.



Exercice 5

On définit le motif géométrique suivant et la suite (u_n) égale au nombre de points qui compose le motif n . On suppose que le Motif 0 ne contient aucun point c'est à dire $u_0=0$.



1. Compléter le motif 4.
2. Déterminer u_7 . Expliciter votre démarche.
3. Établir une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n pour tout entier naturel n .

Exercice 6

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 0,2n^2 + n - 3$.
 - (a) Calculer $u_0; u_1$ et u_2 .
 - (b) Établir une conjecture le sens de variations de (u_n) .
 - (c) Démontrer votre conjecture.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{n}{n+1}$.
 - (a) Calculer $v_0; v_1$ et v_2 .
 - (b) Établir une conjecture le sens de variations de (v_n) .
 - (c) Démontrer votre conjecture.

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = w_n - 2n - 3$ et $w_0 = 0$.
 - (a) Calculer w_1 et w_2 .
 - (b) Établir une conjecture le sens de variations de (w_n) .
 - (c) Démontrer votre conjecture.

4. On considère la suite (x_n) définie pour tout entier naturel n par $x_{n+1} = x_n + n^2$ et $x_0 = -5$.
 - (a) Calculer x_1 et x_2 .
 - (b) Établir une conjecture le sens de variations de (x_n) .
 - (c) Démontrer votre conjecture.

Correction

Exercice 1

$x_1 = -1$ est une solution évidente car $(-1)^2 + 5 \times (-1) + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$ donc la deuxième solution x_2 vérifie

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \text{ donc } -x_2 = \frac{4}{1} \text{ donc } x_2 = -4 .$$

Conclusion : $S = \{-4; -1\}$.

Exercice 2

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (m-1) \times (1-m) = 4 + 4(m-1)^2 \text{ car } (1-m) = -(m-1) .$$

Or, $4 > 0$ et $(m-1)^2 > 0$ avec $m \neq 1$ donc $\Delta = 4 + 4(m-1)^2 > 0$ donc E_m a deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 .

De plus, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{(1-m)}{(m+1)} = -1 < 0$ donc x_1 et x_2 sont de signes contraires.

Remarque : on a même $x_2 = -\frac{1}{x_1}$.

Exercice 3

1. Résoudre l'équation $x^2 + 7x + 12 = 0$ dans \mathbb{R} .

$\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times 12 = 49 - 48 = 1 > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 avec

$$x_1 = \frac{-7-1}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \text{ et } x_2 = \frac{-7+1}{2} = \frac{-6}{2} = -3 .$$

Conclusion : $S = \{-4; -3\}$.

2. Résoudre l'inéquation $-2x^2 - x + 4 < 0$ dans \mathbb{R} .

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 1 + 32 = 33 > 0$ donc $p(x) = -2x^2 - x + 4$ a deux racines réelles distinctes

$$x_1 \text{ et } x_2 \text{ avec } x_1 = \frac{-7-1}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \text{ et } x_2 = \frac{-7+1}{2} = \frac{-6}{2} = -3 .$$

Or, $a = -2 < 0$ d'où le tableau de signes de $p(x)$ sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	-4	-3	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	-	0	+	0	-

Conclusion : $S =]-\infty; -4[\cup]-3; +\infty[$.

Exercice 4

$$A_{\text{croix}} = 4 \times x + 3 \times x - x^2 = 7x - x^2 . \text{ On déduit } A_{\text{restante}} = 4 \times 3 - (7x - x^2) = 12 - 7x + x^2 = x^2 - 7x + 12 .$$

On cherche donc $x \in]0; 3[$ tel que $7x - x^2 = x^2 - 7x + 12$.

$$\text{Or, } 7x - x^2 = x^2 - 7x + 12 \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 .$$

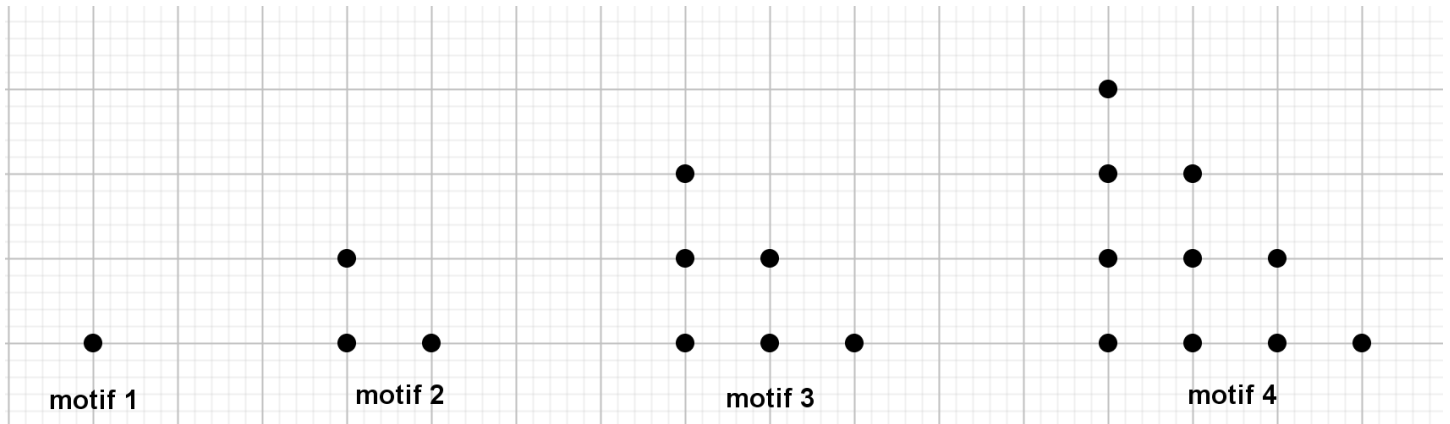
$x_1 = 1$ est une solution évidente car $1^2 - 7 \times 1 + 6 = 1 - 7 + 6 = -6 + 6 = 0$ donc la deuxième solution x_2 vérifie

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \text{ donc } x_2 = \frac{6}{1} = 6 . \text{ Or, } x_2 = 6 > 3 \text{ donc ne peut pas convenir.}$$

Conclusion : Seule la solution $x_1 = 1$ peut convenir. La croix aura une aire égale à l'aire restante lorsque $x = 1$.

Exercice 5

1. On complète le motif 4 ci-dessous :



2. Le motif $n+1$ a un nombre de points égal au motif n auquel on ajoute $n+1$ points. On a :

$$u_5 = u_4 + 5 = 10 + 5 = 15 \quad u_6 = u_5 + 6 = 15 + 6 = 21 \quad u_7 = u_6 + 7 = 21 + 7 = 28$$

3. On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n + 1$

Exercice 6

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 0,2n^2 + n - 3$.

(a) $u_0 = 0,2 \times 0^2 + 0 - 3 = -3 \quad u_1 = 0,2 \times 1^2 + 1 - 3 = 0,2 + 1 - 3 = -1,8$

$u_2 = 0,2 \times 2^2 + 2 - 3 = 0,2 \times 4 + 2 - 3 = 0,8 + 2 - 3 = 2,8 - 3 = -0,2$

(b) $u_0 < u_1 < u_2$ donc (u_n) semble croissante.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = [0,2 \times (n+1)^2 + (n+1) - 3] - (0,2n^2 + n - 3) = 0,2(n^2 + 2n + 1) + n + 1 - 3 - 0,2n^2 - n + 3$$

$$u_{n+1} - u_n = 0,2n^2 + 0,4n + 0,2 + n + 1 - 3 - 0,2n^2 - n + 3 = 0,4n + 1,2$$

Or, $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ donc $0,4n + 1,2 \geq 1,2 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{n}{n+1}$.

(a) $v_0 = \frac{0}{0+1} = 0 \quad v_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad v_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$

(b) $v_0 < v_1 < v_2$ donc (v_n) semble croissante.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Or, $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ donc $n+1 \geq 1 > 0$ et $n+2 \geq 2 > 0$ donc $\frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ donc (v_n) est strictement croissante.

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = w_n - 2n - 3$ et $w_0 = 0$.
- (a) $w_1 = w_0 - 2 \times 0 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$ et $w_2 = w_1 - 2 \times 1 - 3 = -3 - 2 - 3 = -8$.
- (b) $w_0 > w_1 > w_2$ donc (w_n) semble décroissante.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $w_{n+1} - w_n = (w_n - 2n - 3) - w_n = -2n - 3$.
Or $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ donc $-2n - 3 \leq -3 < 0$ donc (w_n) est strictement décroissante.
4. On considère la suite (x_n) définie pour tout entier naturel n par $x_{n+1} = x_n + n^2$ et $x_0 = -5$.
- (a) $x_1 = -5 + 0^2 = -5$ et $x_2 = x_1 + 1^2 = -5 + 1 = -4$
- (b) On a $x_0 \leq x_1 < x_2$ donc (x_n) semble croissante.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x_{n+1} - x_n = (x_n + n^2) - x_n = n^2 \geq 0$ donc (x_n) est croissante.