Chapitre 2 : Nombres complexes

Au milieu du 16ème siècle, Cardan et Tartaglia publient des formules donnant les solutions d'équations du 3ème degré. Bombelli note des paradoxes dans ces formules et en 1572 propose la notation $\sqrt{-1}$ pour lever les problèmes.
En 1777 soit deux cents ans plus tard, Euler introduit la notation i pour ce nombre. Ainsi $i^2 = -1$.
En 1830, Carl Friederich Gauss généralise l'emploi de la lettre i pour noter les nombres complexes.

I. Définitions et propriétés

Définition : Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ appelé **ensemble des nombres complexes** tel que :

- L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$
- L'addition et la la multiplication des réels se prolongent aux complexes et les règles de calculs restent les mêmes
- Il existe un nombre noté i tel que $i^2=-1$
- Tout nombre complexe s'écrit de manière unique $z=a+ib$ avec a et b réels

Définition :
- L'écriture $z=a+ib$ avec a et b réels s'appelle la **forme (ou écriture) algébrique** du nombre complexe z.
- $a=\mathrm{Re}(z)$ s'appelle la partie réelle de z
- $b=\mathrm{Im}(z)$ s'appelle la partie imaginaire de z

<u>ATTENTION</u> :
- Ne pas confondre Im(z) et i Im(z).
- La partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel.

Exercice 1 :

Déterminer la partie réelle et imaginaire des nombres $z_1=-4+5i\,;z_2=\sqrt{3}$ et $z_3=\frac{2}{3}i$.

Remarques :
- *z est un réel lorsque b=Im (z) = 0*
- *z est un imaginaire pur lorsque a = Re(z) = 0*
- *0 est l'unique nombre complexe à la fois réel et imaginaire pur*
- *On peut dire indifféremment nombre complexe ou complexe*

Propriétés :

a) $z=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$ et $\mathrm{Im}(z)=0$

b) $z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$

Preuve :

a) *Soient* $z=a+ib\in\mathbb{C}$ *avec* $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

- *Si* $z=0$ *alors* $a+ib=0$. *On raisonne par l'absurde et on suppose que* a et b *ne sont pas tous les deux nuls.*
  - *Si* $b=0$ *alors l'égalité donne* $a+i\times 0=0$ *donc* $a=0$ *ce qui est contraire à l'hypothèse*
  - *Si* $b\neq 0$ *alors l'égalité donne* $i=-\frac{a}{b}$. *Comme* a et b *sont réels alors* $-\frac{a}{b}$ *est aussi réel donc i est réel ce qui est impossible car i n'est pas un réel.*

  Par conséquent, $b=0$ *ce qui entraîne* $a=0$

- *Réciproquement, si* $a=b=0$ *alors* $z=a+ib=0+i\times 0=0$

On déduit l'équivalence $z=0\Leftrightarrow a=b=0$

b) *Soient* $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ *deux nombres complexes avec* $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}, a'\in\mathbb{R}$ et $b'\in\mathbb{R}$.
$z=z' \Leftrightarrow z-z'=0 \Leftrightarrow (a-a')+i(b-b')=0 \Leftrightarrow a-a'=0$ et $b-b'=0 \Leftrightarrow a=a'$ et $b=b'$ *d'après le* ***1*** *.* #

Égalité de deux nombres complexes : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

$$z=z' \Leftrightarrow \mathrm{R}e(z)=\mathrm{R}e(z') \text{ et } \mathrm{I}m(z)=\mathrm{I}m(z')$$

Exercice 2 : Soit $x\in\mathbb{R}$. On considère les nombres complexes $z=x^2-x-2+3ix$ et $z'=-2x+i(x^2+x+1)$. Déterminer les éventuelles valeurs de x pour lesquelles :

a) z soit un imaginaire pur puis calculer z le cas échéant.

b) z' soit un réel puis calculer z' le cas échéant.

c) z et z' soient égaux. Calculer $z=z'$ le cas échéant.

II. Opérations dans $\mathbb{C}$

Dans la suite, z et z' désignent deux nombres complexes tels que $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ et k un réel.

Opérations sur les nombres complexes :

- $z+z'=(a+a')+\mathrm{i}(b+b')$
- $z-z'=(a-a')+\mathrm{i}(b-b')$
- $kz=(ka)+\mathrm{i}(kb)$
- $zz'=(aa'-bb')+\mathrm{i}(ab'+a'b)$

Remarques : Les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexes sont linéaires c'est à dire, pour tous nombres complexes z et z' *et pour tout réel* k *, on a :*

- $\mathrm{Re}(z+z')=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')$
- $\mathrm{Im}(z+z')=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z')$
- $\mathrm{Re}(kz)=k\mathrm{Re}(z)$
- $\mathrm{Im}(kz)=k\mathrm{Im}(z)$

Exercice 3 : On considère les nombres complexes $z=-5+7i$ et $z'=-2+3i$
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes $z+z'$ et zz' .

Propriétés

- Commutativité : $z+z'=z'+z$ et $zz'=z'z$
- Associativité : $(z+z')+z''=z+(z'+z'')$ et $(zz')\times z''=z\times(z'z'')=zz'z''$
- Éléments neutres : $z+0=z, z+(-z)=0$ et $z\times 1=z$
- Règles de calculs : $z(z'+z'')=zz'+zz''$ et $zz'=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z'=0$

Preuve : Soient $z=a+ib$, $z'=a'+ib'$ et $z''=a''+ib''$ trois nombres complexes avec $a,a',a'',b,b',b''\in\mathbb{R}$. Les démonstrations découlent de la définition et des propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$. #

Remarque : ces propriétés traduisent la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication, ainsi que la distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{C}$.

Remarque : l'égalité $zz'=z'z$ permet de définir $z^n, n\in\mathbb{N}$.

Propriétés : Pour tous réels a et b , on a :

$$(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab \text{ et } (a-ib)^2=a^2-b^2-2iab \text{ et } (a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$$

Preuve : il suffit de développer comme dans $\mathbb{R}$ en remarquant que $i^2=-1$. #

Exercice 4 : On considère les nombres complexes $z_1=1+i$ et $z_2=2-3i$.
Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z={z_1}^2+{z_2}^2$.

3. Formule du binôme de Newton

Formule du binôme de Newton
Pour tous nombres complexes *a* et *b*, on a :

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

Preuve : Elle se fait par récurrence. #

Formule de Pascal : Soit n un entier naturel et k un entier naturel compris entre 0 et n-1. On a

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

Cette formule est appelée »Formule de Pascal »

Point Histoire : Blaise Pascal (1623-1662) était un mathématicien français célèbre pour ses travaux scientifiques à l'origine des probabilités actuelles.

Triangle de Pascal

Pour déterminer et écrire facilement les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, on construit un « triangle de Pascal » où l'on place à l'intersection de la ligne d'indice n et de la colonne d'indice k, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

On sait que $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ donc la première colonne et la diagonale comporte uniquement des 1.

Puis, à l'aide de la formule de Pascal, on complète l'intégralité du tableau. En effet, chaque nombre est la somme des deux autres nombres de la ligne précédente, l'un dans la même colonne et l'autre dans la colonne précédente.

Ci-dessous est construit le triangle de Pascal pour $n=9$. On a, par exemple, $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=\binom{4}{2}$.

n = 0	1									
n = 1	1	1								
n = 2	1	2	1							
n = 3	1	3	3	1						
n = 4	1	4	6	4	1					
n = 5	1	5	10	10	5	1				
n = 6	1	6	15	20	15	6	1			
n = 7	1	7	21	35	35	21	7	1		
n = 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
n = 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9

Remarque : on observe que le triangle de Pascal est symétrique. Cela est dû à la formule $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Exercice 5 :

1. Construire le triangle de Pascal pour $n=7$.
2. Déterminer $\binom{5}{2};\binom{6}{3};\binom{6}{4};\binom{7}{2}$ et $\binom{7}{4}$
3. Sans aucun calcul, justifier que $\binom{8}{3}=\binom{8}{5}$

Exercice 6 : A l'aide de la formule du binôme de Newton, démontrer que $(1+i)^3=-2+2i$.

Exercice 7 : A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer $(1+2i)^4$.