

Exercice 1 : Déterminer la partie réelle et imaginaire des nombres $z_1 = -4 + 5i$; $z_2 = \sqrt{3}$ et $z_3 = \frac{2}{3}i$.

Correction

$$\operatorname{Re}(z_1) = -4 \text{ et } \operatorname{Im}(z_1) = 5; \operatorname{Re}(z_2) = \sqrt{3} \text{ et } \operatorname{Im}(z_2) = 0; \operatorname{Re}(z_3) = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z_3) = \frac{2}{3}$$

Exercice 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère les nombres complexes $z = x^2 - x - 2 + 3ix$ et $z' = -2x + i(x^2 + x + 1)$. Déterminer les éventuelles valeurs de x pour lesquelles :

- z soit un imaginaire pur puis calculer z le cas échéant.
- z' soit un réel puis calculer z' le cas échéant.
- z et z' soient égaux. Calculer $z = z'$ le cas échéant.

Correction

$$\text{a) } z = x^2 - x - 2 + 3ix \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2$$

Conclusion : si $x = -1$ alors $z = -3i$ et si $x = 2$ alors $z = 6i$

$$\text{b) } z' = -2x + i(x^2 + x + 1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

Résolution dans \mathbb{R} de $x^2 + x + 1$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0 \text{ donc l'équation n'a pas de solutions réelles.}$$

Conclusion : il n'existe aucune valeur réelle de x pour laquelle z' soit un réel.

$$\begin{aligned} \text{c) } z = z' &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 + 3ix = -2x + i(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow (x^2 - x - 2 + 2x) + i(3x - x^2 - x - 1) = 0 \\ z = z' &\Leftrightarrow (x^2 + x - 2) + i(-x^2 + 2x - 1) = 0 \\ z = z' &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ -x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) = 0 \\ -(x^2 - 2x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) = 0 \\ -(x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \\ z = z' &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Conclusion : Pour $x = 1$, $z = z' = 1^2 - 1 - 2 + 3i = -2 + 3i$

Exercice 3 : On considère les nombres complexes $z = -5 + 7i$ et $z' = -2 + 3i$
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes $z + z'$ et zz' .

Correction

- $z + z' = (-5 + 7i) + (-2 + 3i) = -7 + 10i$
- $zz' = (-5 + 7i)(-2 + 3i) = 10 - 15i - 14i + 21i^2 = 10 - 15i - 14i - 21 = -11 - 29i$

Exercice 4 : On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2 - 3i$.
Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z = z_1^2 + z_2^2$.

Correction

$$z = z_1^2 + z_2^2 = (1 + i)^2 + (2 - 3i)^2 = (1 + 2i - 1) + (4 - 12i - 9) = -5 - 10i$$

Exercice 5 : A l'aide de la formule du binôme de Newton, démontrer que $(1 + i)^3 = -2 + 2i$.

Correction

A l'aide du binôme de Newton, on obtient les coefficients de Newton pour $n = 3$

$n = 0$	1			
$n = 1$	1	1		
$n = 2$	1	2	1	
$n = 3$	1	3	3	1
	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$

On déduit $(1 + i)^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times i + 3 \times 1 \times i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$

Exercice 5 :

1. Construire le triangle de Pascal pour $n=7$.
2. Déterminer $\binom{5}{2}$; $\binom{6}{3}$; $\binom{6}{4}$; $\binom{7}{2}$ et $\binom{7}{4}$
3. Sans aucun calcul, justifier que $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$

Correction

1. Triangle de Pascal pour $n=7$

$n = 0$	1								
$n = 1$	1	1							
$n = 2$	1	2	1						
$n = 3$	1	3	3	1					
$n = 4$	1	4	6	4	1				
$n = 5$	1	5	10	10	5	1			
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	

2. A l'aide du binôme de Newton, on obtient les coefficients de Newton pour $n=7$, on déduit :

$$\binom{5}{2} = 10; \binom{6}{3} = 20; \binom{6}{4} = 15; \binom{7}{2} = 21 \text{ et } \binom{7}{4} = 35$$

3. Le triangle de Pascal est symétrique donc $\binom{8}{4-1} = \binom{8}{4+1}$ donc $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$

Exercice 6 : A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer $(1+2i)^4$.

Correction

A l'aide du binôme de Newton, on obtient les coefficients de Newton pour $n=4$

$n = 0$	1				
$n = 1$	1	1			
$n = 2$	1	2	1		
$n = 3$	1	3	3	1	
$n = 4$	1	4	6	4	1
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$

On déduit $(1+2i)^4 = 1^4 + 4 \times 1^3 \times (2i) + 6 \times 1^2 \times (2i)^2 + 4 \times 1 \times (2i)^3 + (2i)^4 = 1 + 8i - 24 - 32i + 16 = -7 - 24i$