Exercice 1

On considère la suite (u_n) constituée des multiples de 3.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Corrigé

1. $u_0=0; u_1=3; u_2=6; u_3=9; u_4=12$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+3$ avec $u_0=0$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n=3n$

Exercice 2

Une compagnie aérienne décide de s'implanter en France. Une ligne aérienne est constituée d'un aller-retour entre deux villes différentes. Ainsi, relier deux villes entre elles permet de créer une ligne.

1. Cette compagnie reçoit une autorisation pour relier trois villes entre elles. Combien de lignes sont-elles ainsi créées ?
2. Cette compagnie reçoit ensuite une autorisation pour relier quatre villes entre elles. Combien de lignes sont-elles ainsi crées ?
3. On définit ainsi une suite (u_n) telle que u_n soit égale au nombre de lignes créées. Exprimer u_n en fonction de n . Justifier votre réponse.

Corrigé

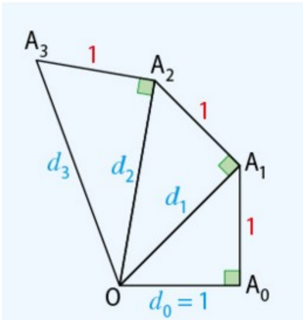
1. 3 lignes sont créées.
2. 6 lignes sont créées.
3. Pour chaque ville, il y a $n-1$ lignes possibles donc pour n villes il y a $n(n-1)$ trajets possibles c'est à dire $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes car une ligne est composée d'un aller retour c'est à dire de deux trajets. On déduit que $\forall n \geqslant 1, u_n=\frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 3 - L'escargot Pythagoricien

O désigne un point du plan.

1. Construire un triangle OA_0A_1 rectangle et isocèle en A_0 tel que $OA_0=A_0A_1=1$.
   Calculer la longueur exacte de OA_1 ?
2. Construire un triangle OA_1A_2 rectangle en A_1 tel que $A_1A_2=1$.
   Calculer la longueur exacte de OA_2 ?
3. On construit un triangle OA_2A_3 rectangle en A_2 tel que $A_2A_3=1$.
   Calculer la longueur exacte de OA_3 ?
4. On poursuit le processus de construction des triangles OA_nA_{n+1}
   On créé ainsi une suite (d_n) de nombres définie par $d_n=OA_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. A quel nombre est égal d_{n+1} ?
5. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n

Corrigé



1. Dans OA_0A_1 rectangle en A_0 , d'après le théorème de Pythagore on a $OA_1^2=OA_0^2+A_0A_1^2=1^2+1^2=2 \text{ donc } OA_1=\sqrt{2}$
2. De même, Dans OA_1A_2 rectangle en A_1 , d'après le théorème de Pythagore on a
   $OA_2^2=OA_1^2+A_1A_2^2=(\sqrt{2})^2+1^2=3 \text{ donc } OA_2=\sqrt{3}$
3. De même, Dans OA_2A_3 rectangle en A_2 , d'après le théorème de Pythagore on a
   $OA_3^2=OA_2^2+A_2A_1^2=(\sqrt{3})^2+1^2=4 \text{ donc } OA_3=\sqrt{4}$
4. De même, Dans OA_nA_{n+1} rectangle en A_n , d'après le théorème de Pythagore on a
   $OA_{n+1}^2=OA_n^2+A_nA_{n+1}^2=d_n{}^2+1^2=d_n{}^2+1 \text{ donc } OA_{n+1}=\sqrt{d_n^2+1}$.
5. On déduit que $\forall n\in\mathbb{N}, d_{n+1}=\sqrt{d_n^2+1}$.

Exercice 4

On considère la suite (v_n) définie par son premier terme $v_0=-5$ et telle qu'en multipliant un terme par 7 et en soustrayant 3 on obtient le terme suivant.

1. Calculer $v_1 ; v_2$ et v_3
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n
3. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur de v_{35}

Corrigé

1. $v_0=-5$
   $v_1=(-5)\times 7-3=-35-3=-38$
   $v_2=(-38)\times 7-3=-366-3=-269$
   $v_3=(-269)\times 7-3=-1883-3=-1886$
2. $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=7v_n-3$
3. A la calculatrice, on obtient $v_{35}\approx -2{,}1\times 10^{30}$

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=n^2-1$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2. Conjecturer les variations de la suite.
3. Démontrer votre conjecture.

Corrigé

1. $u_0=0^2-1=-1\,;u_1=1^2-1=1-1=0\,;u_2=2^2-1=4-1=3$ et $u_3=3^2-1=9-1=8$
2. D'après les calculs des quatre premiers termes de la suite, (u_n) semble croissante.
3. Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :

   $u_{n+1}-u_n=((n+1)^2-1)-(n^2-1)=(n+1)^2-n^2=(n+1-n)(n+1+n)=2n+1$

   Or $n\in\mathbb{N}$ donc $n\geqslant 0$ donc $2n+1\geqslant 1>0$ donc (u_n) est strictement croissante.