Exercice 1 :

On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 2n^2+1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 2v_n^2+1 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes de chaque suite
2. Calculer le 5ème terme de chaque suite

Correction

1. $u_0=1\,; u_1=2\times1^2+1=3$ et $u_2=2\times2^2+1=9$
   $v_0=0\,; v_1=2\times0^2+1=1$ et $v_2=2\times1^2+1=3$
2. Le 5ème terme de la suite (u_n) est $u_4=2\times4^2+1=33$
   Le 5ème terme de la suite (v_n) est $v_4=2\times v_3^2+1$
   Or $v_3=2\times v_2^2+1=2\times3^2+1=19$ d'où $v_4=2\times19^2+1=723$

Exercice 2 :

Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^2+2n+3$

Correction

$u_0=3\,; u_1=6\,; u_2=11$ et $u_3=18$

Exercice 3 :

Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n-3 \end{cases}$

Correction

$u_0=2\,; u_1=4\times2-3=5\,; u_2=4\times5-3=17$ et $u_3=4\times17-3=65$

Exercice 4 :

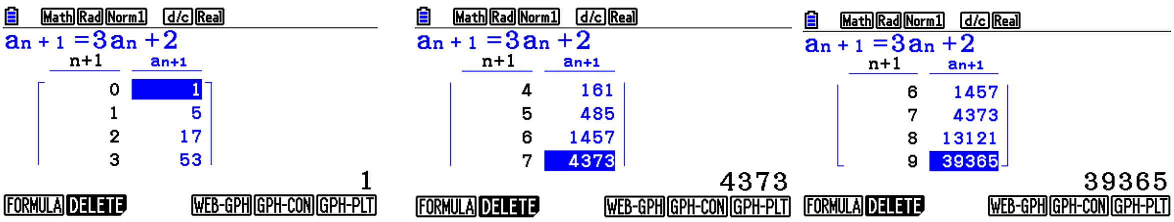
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par l'algorithme suivant :

$A \leftarrow 1$
Pour i allant de 1 à N
$\quad A \leftarrow 3 \times A + 2$
Fin Pour

1. Utiliser le mode récurrence de votre calculatrice pour calculer les dix premiers termes.
2. Programmer l'algorithme précédent sous Python.

Correction

1.



2.

main.py

```python
u=0
for i in range(0,11):
  u = 3*u+2
  print(u)
```

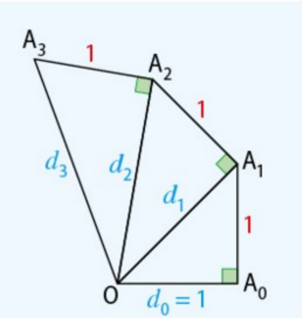
```
2
8
26
80
242
728
2186
6560
19682
59048
177146
>
```

Exercice 5 : l'escargot Pythagoricien

O désigne un point du plan.

1. On construit un triangle OA_0A_1 rectangle et isocèle en A_0 tel que $OA_0 = A_0A_1 = 1$. Calculer la longueur exacte de OA_1 ?
2. On construit un triangle OA_1A_2 rectangle en A_1 tel que $A_1A_2 = 1$. Calculer la longueur exacte de OA_2 ?
3. On construit un triangle OA_2A_3 rectangle en A_2 tel que $A_2A_3 = 1$. Calculer la longueur exacte de OA_3 ?
4. On poursuit le processus de construction des triangles OA_nA_{n+1}
   On créé ainsi une suite (d_n) de nombres définie par $d_n = OA_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. A quel nombre est égal d_{n+1} ?

Correction



1. Dans OA_0A_1 rectangle en A_0 , d'après le théorème de Pythagore on a $OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $OA_1 = \sqrt{2}$
2. De même, Dans OA_1A_2 rectangle en A_1 , d'après le théorème de Pythagore on a
   $OA_2^2 = OA_1^2 + A_1A_2^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$ donc $OA_2 = \sqrt{3}$
3. De même, Dans OA_2A_3 rectangle en A_2 , d'après le théorème de Pythagore on a
   $OA_3^2 = OA_2^2 + A_2A_1^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$ donc $OA_3 = \sqrt{4}$
4. De même, Dans OA_nA_{n+1} rectangle en A_n , d'après le théorème de Pythagore on a
   $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2 = {d_n}^2 + 1^2 = {d_n}^2 + 1$ donc $OA_{n+1} = \sqrt{d_n^2 + 1}$

Exercice 6 :
Étudier les variations des suites ci-dessous définies pour tout entier naturel par :

$u_n=4n+(-2)^n$ $\quad v_n=3n^2-n+1$ $\quad w_n=n^2+9n+1$ $\quad \begin{cases} t_0= & 1 \\ t_{n+1}=t_n-(n+1)^2 \end{cases}$

Correction

- $u_0=4\times0+(-2)^0=0+1=1$
  $u_1=4\times1+(-2)^1=4-2=2$
  $u_2=4\times2+(-2)^2=8+4=12$
  $u_3=4\times3+(-2)^3=12-8=4$ donc (u_n) est ni croissante ni décroissante.

- $v_0=3\times0^2-0+1=1$
  $v_1=3\times1^2-1+1=3-1+1=3$
  $v_2=3\times2^2-2+1=12-2+1=11$
  $v_3=3\times3^2-3+1=27-3+1=25$
  donc (v_n) semble croissante. Démontrons que (v_n) est, en effet, croissante.
  Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :
  $v_{n+1}-v_n=(3(n+1)^2-(n+1)+1)-(3n^2-n+1)=3(n+1)^2-(n+1)+1-3n^2+n-1$
  $v_{n+1}-v_n=3(n^2+2n+1)-n-1-3n^2+n$
  $v_{n+1}-v_n=3n^2+6n+3-n-1-3n^2+n=6n+2$

  Or $n\in\mathbb{N}$ donc $n\geqslant0$ donc $6n+2\geqslant2>0$ donc $v_{n+1}-v_n>0$ donc (v_n) est strictement croissante.

Remarque : on pouvait aussi remarquer que $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=f(n)$ avec $f(x)=3x^2-x+1$ *et donc étudier les variations de* f *puis en déduire celles de* (v_n) .

- $w_0=0^2+9\times0+1=1$
  $w_1=1^2+9\times1+1=1+9+1=11$
  $w_2=2^2+9\times2+1=4+18+1=23$
  $w_3=3^2+9\times3+1=9+27+1=37$
  donc (w_n) semble croissante. Démontrons que (w_n) est, en effet, croissante.
  Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :
  $w_{n+1}-w_n=((n+1)^2+9(n+1)+1)-(n^2+9n+1)=n^2+2n+1+9n+9+1-n^2-9n-1$
  $w_{n+1}-w_n=2n+10$
  Or $n\in\mathbb{N}$ donc $n\geqslant0$ donc $2n+10\geqslant10>0$ donc $w_{n+1}-w_n>0$ donc (w_n) est strictement croissante.

- Soit $n\in\mathbb{N}$, on a $t_{n+1}-t_n=-(n+1)^2<0$. En effet, un carré est toujours positif ou nul donc $(n+1)^2>0$ avec $n\in\mathbb{N}$ donc $-(n+1)^2<0$ donc (t_n) est strictement décroissante.