La calculatrice est autorisée

Exercice 1 : Étude d'une fonction polynôme du second degré
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

1. Donner la forme canonique de f par la méthode de votre choix puis en déduire les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction f.
2. Déterminer l'axe de symétrie de la parabole.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ puis en déduire la forme factorisée de $f(x)$.
4. En justifiant, dresser le tableau de signes de $f(x)$ puis résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.
5. En justifiant, donner les variations de la fonction f puis préciser si la fonction admet un minimum ou un maximum, et donner la valeur de ce minimum ou maximum.

Exercice 2 : Problème géométrique
Un jardin rectangulaire doit être clôturé sur trois côtés seulement (deux côtés parallèles et un côté perpendiculaire aux deux autres), le quatrième côté étant bordé par un mur. On dispose de 60 mètres de clôture.

1. Exprimer la largeur x du jardin en fonction de la longueur y, en tenant compte des 60 mètres de clôture disponibles.
2. On note $A(x)$ l'aire du jardin en fonction de x. Montrer que $A(x) = -2x^2 + 60x$.
3. Donner l'ensemble de définition de $A(x)$.
4. Calculer les dimensions du jardin pour que l'aire soit maximale.
5. Quelle est l'aire maximale possible du jardin ?
6. Donner le tableau de variation de la fonction $A(x)$.
7. Interpréter le résultat trouvé dans le contexte du problème.

Exercice 3 : Équation du second degré avec paramètres
On considère l'équation $x^2 + 2x + a = 0$, où a est un paramètre réel.

1. Résoudre l'équation pour $a = -3$.
2. Donner les conditions sur a pour que l'équation ait :
   - Deux solutions réelles distinctes.
   - Une solution réelle double.
   - Aucune solution réelle.
3. Résoudre l'inéquation $x^2 + 2x + a \leq 0$ pour $a = 1$.

Exercice 4 : Optimisation dans un contexte physique
Un projectile est lancé verticalement du sol avec une vitesse initiale de 20 m/s. Sa hauteur h(t) après t secondes est donnée par la formule $h(t) = -5t^2 + 20t$.

1. Calculer la hauteur maximale atteinte par le projectile. Justifier votre réponse.
2. À quel moment le projectile atteint-il cette hauteur maximale ?
3. Déterminer à quel instant le projectile touche le sol.
4. Pendant quelle durée la hauteur du projectile est supérieure ou égale à 10 mètres. Justifier votre réponse.

Correction

Exercice 1 : Étude d'une fonction polynôme du second degré
On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x) = 2x² - 4x + 1.

1. $f(x)=2x^2-4x+1=2(x^2-2x)+1=2[(x-1)^2-1]+1=2(x-1)^2-2+1=2(x-1)^2-1$ est une fonction polynôme du second de gré sous sa forme canonique donc le sommet de la parabole C_f est $S(1;-1)$.
2. On déduit que C_f a pour axe de symétrie la droite verticale d'équation $x=1$.
3. $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times1=16-8=8>0$ donc l'équation $f(x)=0$ a deux solutions réelles distinctes $x_1=\frac{4-\sqrt{8}}{4}=\frac{4-2\sqrt{2}}{4}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   On déduit que $f(x)$ est factorisable sous la forme $f(x)=2\times\left(x-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\right)\times\left(x-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\right)$.
4. On déduit le tableau de signes de $f(x)$ avec $a=2>0$.

x	$-\infty$		$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Conclusion : $S=[1-\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

5. f est une fonction polynôme du second degré ayant pour sommet $S(1;-2)$ avec $a=2>0$.
   On déduit le tableau de variations de f sur ℝ .

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

f est décroissante sur $]-\infty;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$ donc f admet un minimum en $x=1$ qui vaut -1.

Exercice 2 : Problème géométrique

1. $2x+y=60 \Leftrightarrow 2x=60-y \Leftrightarrow x=\frac{60-y}{2}$.
2. $A(x)=x\times y=x(60-2x)=60x-2x^2=-2x^2+60x$.
3. $A(x)$ est un polynôme du second degré sous sa forme développée définie sur $[0;30]$.
4. Le coefficient des x^2 est $a=-2$ donc la fonction A admet un maximum en $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-60}{-4}=15$ qui vaut $f(15)=-2\times15^2+60\times15=-2\times225+900=450\,m^2$.
   Les dimensions du rectangle correspondent à une aire maximale de 450m² sont donc $x=15$ et $y=-2\times15^2+60\times15=30$.
5. L'aire maximale possible du jardin est donc 450m².
6. On déduit le tableau de variations de $A(x)$ sur [0;30] :

x	0		15		30
$f(x)$	0	↗	450	↘	0

7. Avec un grillage d'une longueur totale de 60m et un mur servant d'une des longueurs, le rectangle d'aire maximale que l'on peut construire a pour largeur 15m, pour longueur 30m et pour aire 450m².

Exercice 3 : Équation du second degré avec paramètres
On considère l'équation x² + 2x + a = 0, où a est un paramètre réel.

1. Pour $a=-3$, l'équation s'écrit $x^2+2x-3=0$.
   $x_1=1$ est une racine évidente car donc la deuxième racine x_2 vérifie $x_1 x_2=\frac{c}{a}=\frac{-3}{1}$ donc $x_2=-3$.
   Conclusion : $S=\{1;-3\}$.

2. L'équation $x^2+2x+a=0$ a deux solutions distinctes si et seulement si $\Delta>0$.
   $\Delta=2^2-4a=4-4a>0 \Leftrightarrow 4>4a \Leftrightarrow a<1$.
   L'équation $x^2+2x+a=0$ a une seule solution si et seulement si $\Delta=0$.
   $\Delta=4-4a=0 \Leftrightarrow 404a \Leftrightarrow a=1$.
   L'équation $x^2+2x+a=0$ n'a aucune solution réelle si et seulement si $\Delta<0$.
   $\Delta=4-4a>0 \Leftrightarrow 4>4a \Leftrightarrow a<1$.

3. Pour $a=1$, l'équation s'écrit $x^2+2x+1=0$ a pour discriminant $\Delta=0$.
   Or, le coefficient des x^2 vaut $a=1>0$ donc :
   $x^2+2x+1\leqslant 0 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

   Conclusion : $S=\{-1\}$.

Exercice 4 : Optimisation dans un contexte physique
Un projectile est lancé verticalement du sol avec une vitesse initiale de 20 m/s. Sa hauteur h(t) après t secondes est donnée par la formule h(t) = -5t² + 20t.

1. h est définie sur $[0;+\infty[$ par $h(t)=-5t^2+20t$ donc h est une fonction polynôme du second degré avec $a=-5<0$ donc h admet un maximum en $x=\frac{-20}{-10}=2$ qui vaut $h(2)$.
   Or, $h(2)=-5\times 2^2+20\times 2=-20+40=20\,m$.

   Conclusion : la hauteur maximale atteinte par le projectile est égale à 20m.

2. Le projectile atteint cette hauteur maximale au bout de 2 secondes.
3. Pour déterminer le moment t où le projectile touche le sol, il faut et il suffit de résoudre l'équation $h(t)=0$ pour $t>0$.
   $h(t)=0 \Leftrightarrow -5t^2+20t=0 \Leftrightarrow -5t(t-4)=0 \Leftrightarrow t=0 \text{ ou } t=4$.

   Conclusion : le projectile touche le sol au bout de 4 secondes.

4. Pour déterminer la durée durant laquelle la hauteur du projectile est supérieure ou égale à 10 mètres, il faut et il suffit de résoudre l'inéquation $h(t)\geqslant 10$.

Or, $h(t) \geqslant 10 \Leftrightarrow -5t^2+20t \geqslant 10 \Leftrightarrow -5t^2+20t-10 \geqslant 0 \Leftrightarrow -t^2+4t-2 \geqslant 0$.

Étude du signe de $g(t)=-t^2+4t-2 \; pour \; t \geqslant 0$.

$\Delta = 4^2-4\times(-1)\times(-2)=16-8=8>0$ donc g admet deux racines distinctes sur $\mathbb{R}$ qui sont $t_1=\frac{-4-\sqrt{8}}{-2}=\frac{-4-2\sqrt{2}}{-2}=2+\sqrt{2}$ et $t_2=\frac{-4+2\sqrt{2}}{-2}=2-\sqrt{2}$.

On déduit le tableau de signes de $g(t) \; pour \; t \geqslant 0$ avec $a=-1<0$.

t	0		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(t)$		-	0	+	0	-	

Conclusion 1 : $S=[2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}]$.

Conclusion 2 : Le projectile est à une hauteur supérieure ou égale à 10m pendant $(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}\approx 2,8\,s$.