Sujet B

Exercice
Étudier les variations de chacune des suites ci-dessous :

1. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel *n* par $u_n = n + (-3)^n$.

2. (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel *n* par $v_n = 6n^2 - 3n + 7$.

3. (w_n) est la suite définie par son premier terme $w_1 = -1$ et la relation $w_{n+1} = w_n + \dfrac{2}{n}$ pour tout entier naturel non nul *n*.

Correction

1. $u_0 = 0 + (-3)^0 = 1\,; u_1 = 1 + (-3)^1 = 1 - 3 = -2\,; u_2 = 2 + (-3)^2 = 2 + 9 = 11$
   $u_o > u_1$ et $u_1 < u_2$ donc (u_n) est ni croissante ni décroissante.

2. $v_0 = 7\,; v_1 = 6 \times 1^2 - 3 \times 1 + 7 = 10\,; v_2 = 6 \times 2^2 - 3 \times 2 + 7 = 24 - 6 + 7 = 25$.

   Conjecture : (v_n) semble croissante.
   Démontrons la conjectiure : soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$v_{n+1} - v_n = [6(n+1)^2 - 3(n+1) + 7] - (6n^2 - 3n + 7) = [6(n^2 + 2n + 1) - 3n - 3 + 7] - (6n^2 - 3n + 7)$$
   $$v_{n+1} - v_n = (6n^2 + 12n + 6 - 3n - 3 + 7) - (6n^2 - 3n + 7) = (6n^2 + 9n + 10) - (6n^2 - 3n + 7)$$
   $$v_{n+1} - v_n = 6n^2 + 9n + 10 - 6n^2 + 3n - 7 = 12n + 3$$

   Or, $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geqslant 0$ donc $12n + 3 \geqslant 3 > 0$ donc (v_n) est strictement croissante.

3. $w_1 = -1\,; w_2 = -1 + \dfrac{2}{1} = -1 + 2 = 1\,; w_2 = 1 + \dfrac{2}{2} = 1 + 1 = 2$.

   Conjecture : (w_n) semble croissante.

   Démontrons la conjecture : soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$, on a $w_{n+1} - w_n = \dfrac{2}{n}$.

   Or, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$ donc $n > 0$ donc $\dfrac{2}{n} > 0$ donc (v_n) est strictement croissante.