Sujet A

Exercice
Étudier les variations de chacune des suites ci-dessous :

1. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel *n* par $u_n = -n + (-2)^n$.

2. (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel *n* par $v_n = 3n^2 + 6n - 7$.

3. (w_n) est la suite définie par son premier terme $w_1 = -1$ et la relation $w_{n+1} = w_n - \frac{3}{n^3}$ pour tout entier naturel non nul *n*.

Correction

1. $u_0 = -0 + (-2)^0 = 1\,; u-1 = -1 + (-2)^1 = -1-2 = -3\,; u_2 = -2 + (-2)^2 = -2+4 = 2$
$u_o > u_1$ et $u_1 < u_2$ donc (u_n) est ni croissante ni décroissante.

2. $v_0 = -7\,; v_1 = 3\times1^2 + 6\times1 - 7 = 2\,; v_2 = 3\times2^2 + 6\times2 - 7 = 12+12-7 = 17$.

Conjecture : (v_n) semble croissante.
Démontrons la conjectiure : soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = [3(n+1)^2 + 6(n+1) - 7] - (3n^2 + 6n - 7) = [3(n^2 + 2n + 1) + 6n + 6 - 7] - (3n^2 + 6n - 7)$$
$$v_{n+1} - v_n = (3n^2 + 6n + 3 + 6n + 6 - 7) - (3n^2 + 6n - 7) = (3n^2 + 12n + 2) - (3n^2 + 6n - 7)$$
$$v_{n+1} - v_n = 3n^2 + 12n + 2 - 3n^2 - 6n + 7 = 6n + 9$$

Or, $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geqslant 0$ donc $6n + 9 \geqslant 9 > 0$ donc (v_n) est strictement croissante.

3. $w_1 = -1\,; w_2 = -1 - \frac{3}{1^3} = -1 - 3 = -4\,; w_2 = -4 - \frac{3}{8} = \frac{-35}{8}$.

Conjecture : (w_n) semble décroissante.

Démontrons la conjecture : soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$, on a $w_{n+1} - w_n = \frac{-3}{n^3}$.

Or, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$ donc $n > 0$ donc $n^3 > 0$ donc $\frac{-3}{n^3} < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante.