

Exercice 1

Déterminer un nombre décimal d tel que $\frac{79}{13} < d < \frac{80}{13}$

Correction

On cherche $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{79}{13} < \frac{a}{10^n} < \frac{80}{13}$

$$\frac{79}{13} < \frac{a}{10^n} < \frac{80}{13} \Leftrightarrow 79 \times 10^n < 13a < 80 \times 10^n$$

- Pour $n=0$, on cherche $a \in \mathbb{N}$ tel que $79 < 13a < 80$ ce qui est impossible car $13 \times 6 = 78$ et $13 \times 7 = 91$
- Pour $n=1$, on cherche $a \in \mathbb{N}$ tel que . Or $13 \times 61 = 793$ convient donc $a=1$ et $n=1$ donc $d = \frac{61}{10} = 6,1$

Autre méthode : On pose les divisions de 79 par 13 et de 80 par 13 et on choisit $d=6,1$. On vérifie ensuite que $6,1 \times 13 = 79,3$ est bien strictement compris entre 79 et 80.

Exercice 2

1. Montrer que $\frac{3}{4}$ est décimal
2. Montrer que $\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel non décimal
3. Comparer $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$
4. Déterminer un nombre décimal strictement compris entre $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$

Correction

1. $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = \frac{75}{10^2}$ est décimal

2. $\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel par définition d'un nombre rationnel

Montrons par l'absurde que $\frac{2}{3}$ n'est pas décimal

On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{2}{3} = \frac{a}{10^n}$

$$\frac{2}{3} = \frac{a}{10^n} \Leftrightarrow 2 \times 10^n = 3a \text{ donc } 3 \text{ est un diviseur de } 2 \times 10^n .$$

Or la somme des chiffres de 2×10^n vaut 2 qui n'est pas divisible par 3 donc l'hypothèse $\frac{2}{3}$ décimal est fausse.

Conclusion : $\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel non décimal

3. 1ère méthode : $3 \times 3 = 9$ et $2 \times 4 = 8$ donc $3 \times 3 > 2 \times 4$ donc $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$

2ème méthode : $\frac{3}{4} = \frac{90}{120}$ et $\frac{2}{3} = \frac{80}{120}$. Or $\frac{90}{120} > \frac{80}{120}$ donc $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$

4. On cherche $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{2}{3} < \frac{a}{10^n} < \frac{3}{4}$

$$\frac{2}{3} < \frac{a}{10^n} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{8}{12} < \frac{a}{10^n} < \frac{9}{12} \Leftrightarrow 8 \times 10^n < 12a < 9 \times 10^n$$

- Pour $n=1$, on cherche $a \in \mathbb{N}$ tel que $80 < 12a < 90$. Or $12 \times 7 = 84$ convient donc $a=7$ et $n=1$ donc $d = \frac{7}{10} = 0,7$

Exercice 3

1. Montrer que $\frac{1}{4}, \frac{7}{25}, \frac{11}{20}$ et $-\frac{13}{125}$ sont des nombres décimaux

2. Montrer que tout nombre de la forme $\frac{a}{2^m 5^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ est un nombre décimal.

Correction

1. $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \frac{25 \cdot 7}{10^2} = \frac{28}{100} = \frac{28}{10^2}$, $\frac{11}{20} = \frac{55}{100} = \frac{55}{10^2}$ et $-\frac{13}{125} = \frac{-104}{1000} = \frac{-104}{10^3}$

sont donc des nombres décimaux

2. 1^{er} cas : si $m=n$ alors $\frac{a}{2^m 5^n} = \frac{a}{2^m \times 5^m} = \frac{a}{10^m}$ est décimal

2ème cas : si $m > n$ alors $\frac{a}{2^m 5^n} = \frac{a}{2^m \times 5^m \times 5^{n-m}} = \frac{a \times 5^{m-n}}{10^m}$ est décimal car

$$5^{m-n} \in \mathbb{N} \text{ donc } a \times 5^{m-n} \in \mathbb{N}$$

3ème cas : si $m < n$ alors $\frac{a}{2^m 5^n} = \frac{a}{2^{m-n} \times 2^n \times 5^n} = \frac{a \times 2^{n-m}}{10^n}$ est décimal car

$$2^{n-m} \in \mathbb{N} \text{ donc } a \times 2^{n-m} \in \mathbb{N}$$

Conclusion : Tout nombre de la forme $\frac{a}{2^m 5^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ est décimal.

Exercice 4

Déterminer le plus petit ensemble auquel appartient chacun des nombres suivants :

$\frac{\pi}{3} \in \dots$

$0,6666 \in \dots$

$-\sqrt{49} \in \dots$

$\frac{1}{5} \in \dots$

$\frac{\sqrt{36}}{2} \in \dots$

Correction

$$\frac{\pi}{3} \in \mathbb{R} \quad 0,6666 = \frac{6666}{10^4} \in \mathbb{D} \quad -\sqrt{49} = -7 \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = \frac{20}{10^2} \in \text{set } \mathbb{D} \quad \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{N}$$

Exercice 5

1. 0 est-il un nombre irrationnel ?
2. L'inverse d'un nombre irrationnel est-il irrationnel ? *indication : raisonner par l'absurde*

Correction

1. $0 = \frac{0}{1}$ donc 0 est rationnel.

2. Soit x un nombre irrationnel donc $x \neq 0$.

1^{er} cas : Si $x > 0$

Supposons que $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$ donc il existe $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{1}{x} = \frac{a}{b}$ donc $x = \frac{b}{a}$ est

rationnel ce qui contredit que x est irrationnel donc l'hypothèse $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

2^{ème} cas : si $x < 0$ donc $\frac{1}{x} < 0$ aussi donc il existe $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{1}{x} = -\frac{a}{b}$

donc $x = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$ est rationnel ce qui contredit que x est irrationnel donc l'hypothèse

$\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

Conclusion : L'inverse d'un nombre irrationnel est-il irrationnel

Exercice 6

Sachant que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel, montrer par un raisonnement par l'absurde que $2\sqrt{3}$; $\sqrt{3}+7$ et $\sqrt{\sqrt{3}}$ sont également irrationnels ?

Correction

On suppose que $\sqrt{3}$ est irrationnel

1. Montrons par l'absurde que $2\sqrt{3}$ est irrationnel.

Supposons que $2\sqrt{3}$ est rationnel alors il existe $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $2\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ donc

$$\sqrt{3} = \frac{a}{2b} \text{ avec } a \in \mathbb{N}^* \text{ et } 2b \in \mathbb{N}^* \text{ donc } \sqrt{3} \text{ est rationnel ce qui est faux.}$$

Conclusion : $2\sqrt{3}$ est irrationnel.

2. Montrons par l'absurde que $\sqrt{3}+7$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{3}+7$ est rationnel alors il existe $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{3}+7 = \frac{a}{b}$ donc

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} - 7 = \frac{a-7b}{b} \text{ avec } a-7b \in \mathbb{N}^* \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \text{ donc } \sqrt{3} \text{ est rationnel ce qui est faux.}$$

Conclusion : $\sqrt{3}+7$ est irrationnel.

3. Montrons par l'absurde que $\sqrt{\sqrt{3}}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{\sqrt{3}}$ est rationnel alors il existe $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{\sqrt{3}} = \frac{a}{b}$ donc

$$\sqrt{3} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \text{ avec } a^2 \in \mathbb{N}^* \text{ et } b^2 \in \mathbb{N}^* \text{ donc } \sqrt{3} \text{ est rationnel ce qui est faux.}$$

Conclusion : $\sqrt{\sqrt{3}}$ est irrationnel.

Exercice 7

Un ascenseur contient une quantité $n = 72$ mol de dioxygène dont la masse molaire est égale à $M = 31,9988$ g/mol. Déterminer la masse de dioxygène dans cet ascenseur. Vous donnerez une valeur approchée du résultat avec un nombre de chiffres significatifs adapté à la situation.

Correction

$$72 \times 31,9988 = 7,2 \times 10^1 \times 3,19988 \times 10^1 = 23,039136 \times 10^2 \text{ g} = 2,3039136 \times 10^3 \text{ .}$$

Or les données comportent 1 et 5 chiffres significatifs donc on en garde 1.

La masse totale de dioxygène dans l'ascenseur vaut donc $2,3 \times 10^3 = 2300$ g environ.

Exercice 8

La loi d'Ohm est $U = R \times I$ où U est la tension, R la résistance et I l'intensité.

Lors d'un TP, Gabriel mesure à l'aide de deux multimètres, $U = 3,789$ V et $R = 370 \Omega$.

Déterminer une valeur approchée du résultat avec un nombre de chiffres significatifs adapté à la situation.

Correction

$$U = R \times I \text{ donc } I = \frac{U}{R} = \frac{3,789}{370} = \frac{3,789}{3,70 \times 10^2} \approx 0,0102405 = 1,02405 \times 10^{-2} \approx 1,02 \times 10^{-2} = 0,0102 \text{ A}$$

car 2 est le plus petit nombre de chiffres significatifs entre 3,789 et $3,70 \times 10^2$.