Sujet B

Exercice 1

On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^2+4x-5$.
Déterminer la forme canonique de f par les deux méthodes vues en classe.

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$-2x^2-x+3=0$ $7x^2-5x=-2$ $x^2=14x-49$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-4(x+5)^2+1$.

1. En justifiant, dresser le tableau de variations de f .
2. f est-elle factorisable ? Si oui, donner sa forme factorisée.
3. En justifiant, dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>0$.

Correction

Exercice 1

On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^2+4x-5$.
Déterminer la forme canonique de f par les deux méthodes vues en classe.

- 1ère méthode : à l'aide des identités remarquables

$$f(x)=4x^2+4x-5=4(x^2+x)-5=4[x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2]-5$$

$$f(x)=4[(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]-5=4(x+\frac{1}{2})^2-1-5=4(x+\frac{1}{2})^2-6$$

Conclusion : $f(x)=4(x+\frac{1}{2})^2-6$ est la forme canonique de f .

- 2ème méthode : à l'aide des formules

$$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times4\times(-5)=16+80=96 \quad \alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2} \quad \beta=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-96}{16}=-6$$

Conclusion : $f(x)=4(x+\frac{1}{2})^2-6$ est la forme canonique de f .

Exercice 2

- Résolution de $-2x^2-x+3=0$

$x_1=1$ est une racine évidente car $-2\times1^2-1+3=-2-1+3=0$ donc la deuxième racine x_2 vérifie
$x_1x_2=\frac{c}{a}$ donc $x_2=\frac{3}{-2}$ donc $x_2=-\frac{3}{2}$

Conclusion : $S=\{1;-\frac{3}{2}\}$.

- Résolution de $7x^2-5x=-2\Leftrightarrow 7x^2-5x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times7\times2=25-56=-31<0$ donc l'équation n'a aucune solution réelle.
Conclusion : $S=\emptyset$.

- Résolution de $x^2=14x-49\Leftrightarrow x^2-14x+49=0\Leftrightarrow(x-7)^2=0\Leftrightarrow x-7=0\Leftrightarrow x=7$

Conclusion : $S=\{7\}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-4(x+5)^2+1$.

1. f est une fonction polynôme du second degré et $f(x)=-4(x+5)^2+1$ est sa forme canonique avec $a=-4<0, \alpha=-5$ et $\beta=1$ d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$

2. 1ère méthode : en développant la forme canonique

$f(x)=-4(x+5)^2+1=-4(x^2+10x+25)+1=-4x^2-40x-100+1=-4x^2-40x-99$

$\Delta=40^2-4\times(-4)\times(-99)=1600-1584=16>0$ donc f admet deux racines réelles distinctes

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{40-4}{-8}=\frac{36}{-8}=-\frac{9}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{40+4}{-8}=-\frac{44}{8}=-\frac{11}{2}$

f est factorisable sous la forme $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-4(x+\frac{9}{2})(x+\frac{11}{2})$.

2ème méthode : à partir de la forme canonique et d'une identité remarquable

$f(x)=-4(x+5)^2+1=-4[\ (x+5)^2-\frac{1}{4}]=-4[\ (x+5)^2-(\frac{1}{2})^2\ ]=-4(x+5-\frac{1}{2})(x+5+\frac{1}{2})$

$f(x)=-4(x+\frac{9}{2})(x+\frac{11}{2})$ est la forme factorisée de f .

3. f est une fonction polynôme du second degré avec $a=4>0$ et admettant deux racines distinctes $\frac{9}{2}$ et $\frac{11}{2}$. On déduit son tableau de signes sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{11}{2}$		$-\frac{9}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		-	0	+	0	-	

On déduit que $f(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{11}{2}<x<-\frac{9}{2}$.

Conclusion : $S=]-\frac{11}{2};-\frac{9}{2}[$