Sujet A

Exercice 1

On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3x^2+3x-1$.
Déterminer la forme canonique de f par les deux méthodes vues en classe.

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$3x^2-x-4=0$ $5x^2-4x=-2$ $x^2=6x-9$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4(x-5)^2-1$.

1. En justifiant, dresser le tableau de variations de f .
2. f est-elle factorisable ? Si oui, donner sa forme factorisée.
3. En justifiant, dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>0$.

Correction

Exercice 1

- 1ère méthode : à l'aide des identités remarquables

$f(x)=-3x^2+3x-1=-3(x^2-x)-1=-3[x^2-2\times x\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2]-1$

$f(x)=-3[(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]-1=-3(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}-\frac{4}{4}=-3(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

Conclusion : $f(x)=-3(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$ est la forme canonique de f .

- 2ème méthode : à l'aide des formules

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times(-3)\times(-1)=9-12=-3$ $\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$ $\beta=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{3}{-12}=-\frac{1}{4}$

Conclusion : $f(x)=-3(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$ est la forme canonique de f .

Exercice 2

- Résolution de $3x^2-x-4=0$

$x_1=-1$ est une racine évidente car $3\times(-1)^2-(-1)-4=3+1-4=0$ donc la deuxième racine x_2 vérifie $x_1x_2=\frac{c}{a}$ donc $-x_2=\frac{-4}{3}$ donc $x_2=\frac{4}{3}$

Conclusion : $S=\{-1;\frac{4}{3}\}$.

- Résolution de $5x^2-4x=-2\Leftrightarrow 5x^2-4x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times5\times2=16-40=-24<0$ donc l'équation n'a aucune solution réelle.
Conclusion : $S=\emptyset$.

- Résolution de $x^2=6x-9\Leftrightarrow x^2-6x+9=0\Leftrightarrow(x-3)^2=0\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3$

Conclusion : $S=\{3\}$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4(x-5)^2-1$.

1. f est une fonction polynôme du second degré et $f(x)=4(x-5)^2-1$ est sa forme canonique avec $a=4>0, \alpha=5$ et $\beta=-1$ d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2. 1ère méthode : en développant la forme canonique

$f(x)=4(x-5)^2-1=4(x^2-10x+25)-1=4x^2-40x+100-1=4x^2-40x+99$

$\Delta=(-40)^2-4\times4\times99=1600-1584=16>0$ donc f admet deux racines réelles distinctes

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{40-4}{8}=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{40+4}{8}=\frac{44}{8}=\frac{11}{2}$

f est factorisable sous la forme $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=4(x-\frac{9}{2})(x-\frac{11}{2})$.

2ème méthode : à partir de la forme canonique et d'une identité remarquable

$f(x)=4(x-5)^2-1=4[\ (x-5)^2-\frac{1}{4}]=4[\ (x-5)^2-(\frac{1}{2})^2\ ]=4(x-5-\frac{1}{2})(x-5+\frac{1}{2})$

$f(x)=4(x-\frac{11}{2})(x-\frac{9}{2})$ est la forme factorisée de f .

3. f est une fonction polynôme du second degré avec $a=4>0$ et admettant deux racines distinctes $\frac{9}{2}$ et $\frac{11}{2}$. On déduit son tableau de signes sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\frac{9}{2}$		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	

On déduit que $f(x)>0 \Leftrightarrow x<\frac{9}{2}$ ou $x>\frac{11}{2}$.

Conclusion : $S=]-\infty;\frac{9}{2}[\cup]\frac{11}{2};+\infty[$