

**Exercice 1**

Déterminer la fonction polynôme du 2nd degré passant par les points A(0 ;1) ; B(1;-2) et C(5;6).

Correction

Soit  $f(x)=ax^2+bx+c$  la fonction polynôme du second degré dont la parabole  $C_f$  passe par les points A(0 ;1) ; B(1;-2) et C(5;6). On obtient alors le système :

$$\begin{cases} a \times 0^2 + b \times 0 + c = 1 \\ a \times 1^2 + b \times 1 + c = -2 \\ a \times 5^2 + b \times 5 + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + 1 = -2 \\ 25a + 5b + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -3 - a \\ 25a + 5(-3 - a) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -3 - a \\ 25a - 15 - 5a = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -3 - a \\ 20a = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -3 - a \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -3 - 1 = -4 \\ a = 1 \end{cases}$$

Conclusion :  $f(x) = x^2 - 4x + 1$

**Exercice 2**

Donner, si possible et pertinemment, la forme factorisée des fonctions polynômes du second degré suivantes :

$$f(x) = 14x - 8x^2$$

$$g(x) = (5x + 1)^2 - (3x - 1)^2$$

$$h(x) = 4x^2 - 7x + 1$$

Correction

$$f(x) = 14x - 8x^2 = 2x(7 - 4x) = 2x \times (-4) \times (x - \frac{7}{4}) = -8x(x - \frac{7}{4})$$

$$g(x) = (5x + 1)^2 - (3x - 1)^2 = ((5x + 1) - (3x - 1))((5x + 1) + (3x - 1)) = (2x + 2)(8x)$$

$$g(x) = 2 \times (x + 1) \times 8x = 16x(x + 1)$$

$$h(x) = 4x^2 - 7x + 1$$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 49 - 16 = 33 > 0$  donc  $h$  admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{33}}{8} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{33}}{8}$$

La forme factorisée de  $h$  est donc  $h(x) = 4(x - \frac{7 - \sqrt{33}}{8})(x - \frac{7 + \sqrt{33}}{8})$

**Exercice 3**

Un disque a pour circonférence  $x \text{ dm}$  et un carré a pour périmètre  $(10-x) \text{ dm}$ .

Déterminer  $x$  de telle sorte que la somme des aires du disque et du carré soit la plus petite possible. En déduire le rayon du disque et le côté du carré arrondi au cm près.

Correction

Soit  $R$  le rayon du disque. On a donc  $R = \frac{x}{2\pi}$

L'aire du disque vaut  $A = \pi \times R^2 = \pi \times \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \pi \times \frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{4\pi}$

Le côté du carré vaut  $c = \frac{(10-x)}{4}$  et son aire vaut  $c^2 = \left(\frac{(10-x)}{4}\right)^2 = \frac{(10-x)^2}{16}$

On déduit que la somme de aires est égale à  $S = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(10-x)^2}{16} = \frac{4x^2}{16\pi} + \frac{\pi(10-x)^2}{16\pi}$

$$S = \frac{4x^2 + \pi(100 - 20x + x^2)}{16\pi} = \frac{4x^2 + 100\pi - 20\pi x + \pi x^2}{16\pi} = \frac{(4 + \pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi}{16\pi}$$

$S$  est minimale lorsque  $f(x) = (4 + \pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi$  est minimale car  $16\pi > 0$

Or  $(4 + \pi) > 0$  donc  $f(x) = (4 + \pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi$  admet un minimum en

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{20\pi}{2(4 + \pi)} = \frac{10\pi}{4 + \pi}$$

On déduit alors que  $R = \frac{\frac{10\pi}{4 + \pi}}{2\pi} = \frac{10\pi}{(4 + \pi)} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{5}{(4 + \pi)} \approx 0,7 \text{ dm} = 7 \text{ cm}$

et  $c = \frac{(10 - \frac{10\pi}{4 + \pi})}{4} = \frac{(40 + 10\pi - 10\pi)}{4} = \frac{40}{4 + \pi} \times \frac{1}{4} = \frac{10}{4 + \pi} \approx 1,4 \text{ dm} = 14 \text{ cm}$

Remarque : la somme des aires est minimale lorsque le côté du carré est égal au diamètre du disque.

**Exercice 4**

Lors d'un lancer, la hauteur atteinte par un javelot au bout de  $t$  secondes est modélisée par la fonction

$$h(t) = -5t^2 + 17t + 2$$

1. A quelle hauteur est située le javelot avant de quitter le bras du lanceur ?
2. Au bout de combien de secondes, le javelot retombe-t-il ?
3. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le javelot ?
4. Pendant combien de temps, le javelot dépasse-t-il les 12m ?

**Correction**

1. Avant de quitter le bras du lanceur, le javelot est situé à la hauteur  $h(0) = 2$  m du sol.

2. Le javelot retombe au sol lorsque  $h(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 17t + 2 = 0$

Résolution de l'équation  $-5t^2 + 17t + 2 = 0$  dans  $\mathbb{R}$

$\Delta = 17^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 289 + 40 = 329 > 0$  donc l'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17 - \sqrt{329}}{-10} = \frac{17 + \sqrt{329}}{10} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17 + \sqrt{329}}{-10} = \frac{17 - \sqrt{329}}{10}$$

Or  $x_1 \approx 3,51$  et  $x_2 \approx -0,11$  donc seule la solution  $x_1 = \frac{17 + \sqrt{329}}{10} \approx 3,51$  secondes convient.

3. La hauteur  $h(t) = -5t^2 + 17t + 2$  est une fonction du second degré avec  $a = -5 < 0$  donc

$h$  admet un maximum en  $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-17}{-10} = \frac{17}{10} = 1,7$  et ce maximum vaut

$$\beta = h(1,7) = 16,45 \text{ m}$$

4. On cherche tous les réels  $t \geq 0$  tels que  $h(t) > 12$

$$h(t) > 12 \Leftrightarrow -5t^2 + 17t + 2 > 12 \Leftrightarrow -5t^2 + 17t - 10 > 0$$

Recherche des racines de  $g(t) = -5t^2 + 17t - 10$  dans  $\mathbb{R}$

$\Delta = 17^2 - 4 \times (-5) \times (-10) = 289 - 200 = 89 > 0$  donc  $g$  admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17 - \sqrt{89}}{-10} = \frac{17 + \sqrt{89}}{10} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17 + \sqrt{89}}{-10} = \frac{17 - \sqrt{89}}{10}$$

Or  $x_1 \approx 2,64$  et  $x_2 \approx 0,76 < 0$  et  $a = -5 < 0$  donc

Conclusion : Le javelot reste au-dessus des 12m pendant environ 1,88 s

**Exercice 5 -**

Un laboratoire teste un nouvel antibiotique sur un échantillon de bactéries.

La quantité de bactéries, en milliers, restantes après  $t$  heures est modélisée par la fonction

$$f(t) = 0,05t^2 - t + 5 \text{ pour } t \in [0; 9] .$$

1. Combien de bactéries contient l'échantillon avant l'injection de l'antibiotique ?
2. Le nombre de bactéries diminue-t-il au fur et à mesure de la durée du traitement ? Pourquoi ?
3. Combien de bactéries contient l'échantillon au bout de 9h ?
4. Un antibiotique sur ce type de bactéries est considéré comme efficace si le nombre de bactéries est inférieur à 1800 au bout de 5h ? Cet antibiotique est-il efficace ?  
Si oui, quelle durée est nécessaire pour atteindre le seuil de 1800 bactéries ?

**Correction**

1. Avant l'injection de l'antibiotique, l'échantillon contenait  $f(0) = 5$  milliers de bactéries soit 5000 bactéries.
2.  $f(t) = 0,05t^2 - t + 5$  est une fonction polynôme du second degré avec  $a = 0,05 > 0$  donc admet un maximum en  $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{0,1} = 10$  donc  $f$  est décroissante sur  $[0; 9]$  donc le nombre de bactéries décroît au fur et à mesure du traitement.
3. Au bout de 9h, le nombre de bactéries est égal à  $f(9) = 0,05 \times 9^2 - 9 + 5 = 0,05$  milliers soit 50 bactéries.
4. Au bout de 5h de traitement, le nombre de bactéries dans l'échantillon est égal à  $f(5) = 0,05 \times 5^2 - 5 + 5 = 1,25$  millier soit  $1250 < 1800$  donc l'antibiotique est efficace.  
On cherche  $t \in [0; 9]$  tel que  $f(t) < 1,8 \Leftrightarrow 0,05t^2 - t + 5 < 1,8 \Leftrightarrow 0,05t^2 - t + 3,2 < 0$   
Étude du signe de  $g(t) = 0,05t^2 - t + 3,2$   
 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0,05 \times 3,2 = 0,36 = 0,6^2 > 0$  donc  $g$  admet deux racines distinctes  
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 0,6}{0,1} = \frac{0,4}{0,1} = 4$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 0,6}{0,1} = \frac{1,6}{0,1} = 16$   
Or  $a = 0,05 > 0$  donc  $g(t) < 0$  dès que  $t > 4$  avec  $t \in [0; 9]$

Conclusion : le seuil des 1800 bactéries est atteint au out de 4h par l'antibiotique.

**Exercice 6**

Déterminer tous les entiers  $n$  tels que  $(n^2 - 7n + 11)^{(n^2 - 3n + 2)} = 1$

Correction

$$(n^2 - 7n + 11)^{(n^2 - 3n + 2)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (n^2 - 7n + 11) = 1 \\ \text{ou } (n^2 - 3n + 2) = 0 \\ \text{ou } (n^2 - 7n + 11) = -1 \text{ et } (n^2 - 3n + 2) \text{ pair} \end{cases}$$

1<sup>er</sup> cas : Résolution de  $n^2 - 7n + 11 = 1$

$$n^2 - 7n + 11 = 1 \Leftrightarrow n^2 - 7n + 10 = 0$$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9 = 3^2 > 0$  donc l'équation  $n^2 - 7n + 10 = 0$  admet deux solutions distinctes  $n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-3}{2} = 2$  et  $n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+3}{2} = 5$

Conclusion 1 :  $n^2 - 7n + 11 = 1 \Leftrightarrow n = 2$  ou  $n = 5$

2<sup>ème</sup> cas : Résolution de  $n^2 - 3n + 2 = 0$

$n_1 = 1$  est une racine évidente donc la deuxième racine  $n_2$  vérifie  $n_1 \times n_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow n_2 = 2$

Conclusion 2 :  $n^2 - 3n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 1$  ou  $n = 2$

3<sup>ème</sup> cas : Résolution de  $n^2 - 7n + 11 = -1$

$$n^2 - 7n + 11 = -1 \Leftrightarrow n^2 - 7n + 12 = 0$$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 49 - 48 = 1 > 0$  donc l'équation  $n^2 - 7n + 12 = 0$  admet deux solutions distinctes  $n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-1}{2} = 3$  et  $n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+1}{2} = 4$

Conclusion 3 :  $n^2 - 7n + 11 = -1 \Leftrightarrow n = 3$  ou  $n = 4$  .

Pour  $n = 3$  on a  $n^2 - 3n + 2 = 3^2 - 3 \times 3 + 2 = 2$  . 2 est bien pair donc  $n = 3$  convient.

Pour  $n = 4$  on a  $n^2 - 3n + 2 = 4^2 - 3 \times 4 + 2 = 16 - 12 + 2 = 6$  . 6 est bien pair donc  $n = 4$  convient aussi.

Conclusion : les entiers qui conviennent sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

**Exercice 7**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^2 - 3x - 180 = 0$
2. En posant  $X = x^2$ , déduire toutes les solutions réelles de l'équation  $x^4 - 3x^2 - 180 = 0$ .  
Remarque : une telle équation est appelée équation bicarrée.

Correction

1. Résolution dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $x^2 - 3x - 180 = 0$   
 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-180) = 9 + 720 = 729 = 27^2 > 0$  donc l'équation  $x^2 - 3x - 180 = 0$  admet deux solutions distinctes  
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 27}{2} = -12$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 27}{2} = 15$
2. En posant  $X = x^2$ , l'équation  $x^4 - 3x^2 - 180 = 0$  est équivalente à  $X^2 - 3X - 180 = 0$   
 D'après le 1. on déduit que  $X^2 - 3X - 180 = 0$  admet une seule solution  $X = 15$  (car l'autre solution est strictement négative donc ne peut pas convenir).  
 $X = 15 \Leftrightarrow x^2 = 15 \Leftrightarrow x = \sqrt{15}$  ou  $-\sqrt{15}$

Conclusion : L'équation  $x^2 - 3x - 180 = 0$  admet deux solutions réelles  $x = \sqrt{15}$  ou  $-\sqrt{15}$

**Exercice 8**

Résoudre l'équation  $2x^4 + x^2 - 6 = 0$

Correction

En posant  $X = x^2$ , l'équation  $2x^4 + x^2 - 6 = 0$  est équivalente à  $2X^2 + X - 6 = 0$

- Résolution dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $2X^2 + X - 6 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49 = 7^2 > 0$  donc l'équation  $2X^2 + X - 6 = 0$  admet deux solutions distinctes  $X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 7}{4} = \frac{-8}{4} = -2$  et  $X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 7}{4} = \frac{3}{2}$

Conclusion 1 : L'équation  $2X^2 + X - 6 = 0$  admet deux solutions réelles  $-2$  et  $\frac{3}{2}$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que  $-2$  est une racine évidente de  $2X^2 + X - 6 = 0$

- Résolution dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $2x^4 + x^2 - 6 = 0$

$$2x^4 + x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 + X - 6 = 0 \text{ avec } X = x^2 \Leftrightarrow X = x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Conclusion : L'équation  $2x^4 + x^2 - 6 = 0$  admet deux solutions réelles  $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$  ou  $-\sqrt{\frac{3}{2}}$