Sujet B

Exercice

On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3x^2+2x+1$.

1. Déterminer une racine évidente de f .
2. En déduire la valeur de sa deuxième racine.
3. Donner la forme factorisée de $f(x)$.
4. A l'aide des identités remarquables, déterminer la forme canonique de $f(x)$.
5. Retrouver votre résultat à l'aide des formules de α, Δ et β .
6. Sans aucun calcul mais en complétant la justification de manière concise, compléter le tableau suivant :

x	
Signe de $f(x)$	

Justification :

7. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x^2+2x+1\geqslant 0$.

Correction

1. $f(1)=-3\times 1^2+2\times 1+1=-3+2+1=-1+1=0$ donc 1 est une racine évidente.
2. $x_1=1$ est une racine évidente. La deuxième racine x_2 vérifie $x_1 x_2=\frac{c}{a}$.

   $x_1 x_2=\frac{c}{a}\Leftrightarrow x_2=\frac{1}{(-3)}\Leftrightarrow x_2=-\frac{1}{3}$.
3. On déduit que $f(x)=-3(x-1)(x+\frac{1}{3})$ est la forme factorisée de $f(x)$.
4. $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=-3x^2+2x+1=-3(x^2-\frac{2}{3}x)+1=-3[(x-\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2]+1$

   $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=-3[(x-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{9}]+1=-3(x-\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}+1=-3(x-\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$

   $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=-3(x-\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$ est la forme canonique de $f(x)$.
5. $\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}, \Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-3)\times 1=4+12=16, \beta=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-16}{-12}=\frac{4}{3}$

   On déduit que la forme canonique de $f(x)$ est bien $f(x)=-3(x-\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$.
6. Justification : $a=-3<0$ d'où le tableau de signe de $f(x)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		-	0	+	0	-	

7. On déduit $2x^2+3x+1>0\Leftrightarrow x\in[-\frac{1}{3};1]$