Sujet A

Exercice

On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+3x+1$.

1. Déterminer une racine évidente de f.
2. En déduire la valeur de sa deuxième racine.
3. Donner la forme factorisée de $f(x)$.
4. A l'aide des identités remarquables, déterminer la forme canonique de $f(x)$.
5. Retrouver votre résultat à l'aide des formules de α, Δ et β.
6. Sans aucun calcul mais en complétant la justification de manière concise, compléter le tableau suivant :

x	
Signe de $f(x)$	

Justification :

7. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x^2+3x+1>0$.

Correction

1. $f(-1)=2\times(-1)^2+3\times(-1)+1=2-3+1=-1+1=0$ donc -1 est une racine évidente.
2. $x_1=-1$ est une racine évidente. La deuxième racine x_2 vérifie $x_1x_2=\frac{c}{a}$.
   $x_1x_2=\frac{c}{a}\Leftrightarrow -x_2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_2=-\frac{1}{2}$.
3. On déduit que $f(x)=2(x+1)(x+\frac{1}{2})$ est la forme factorisée de $f(x)$.
4. $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=2x^2+3x+1=2(x^2+\frac{3}{2}x)+1=2[(x+\frac{3}{4})^2-(\frac{3}{4})^2]+1$
   $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=2[(x+\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}]+1=2(x+\frac{3}{4})^2-\frac{9}{8}+1=2(x+\frac{3}{4})^2-\frac{1}{8}$
   $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=2(x+\frac{3}{4})^2-\frac{1}{8}$ est la forme canonique de $f(x)$.
5. $\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{4}, \Delta=b^2-4ac=3^2-4\times2\times1=9-8=1, \beta=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-1}{8}$
   On déduit que la forme canonique de $f(x)$ est bien $f(x)=2(x+\frac{3}{4})^2-\frac{1}{8}$.
6. Justification : $a=2>0$ d'où le tableau de signe de $f(x)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		-1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	

7. On déduit $2x^2+3x+1>0\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$ ou $x>-1$