

## Exercice 1 :

1. Montrer que 1 et -3 sont deux racines du polynôme  $f(x) = x^2 + 2x - 3$
2. En déduire sa forme factorisée.

## Correction

1.  $f(1) = 1^2 + 2 \times 1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 3 - 3 = 0$  et  $f(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$   
donc 1 et -3 sont deux racines du polynôme  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ .
2.  $f$  est une fonction polynôme du second degré avec  $a = 1$  admettant 1 et -3 pour racines  
donc  $f(x) = 1 \times (x - 1) \times (x - (-3)) = (x - 1)(x + 3)$

## Exercice 2 :

Montrer que la forme factorisée de  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$  est  $3(x - \frac{1}{3})(x + 1)$

## Correction

$3(x - \frac{1}{3})(x + 1)$  est de la forme  $a(x - x_1)(x - x_2)$  avec  $a = 3; x_1 = \frac{1}{3}$  et  $x_2 = -1$ .

De plus,

$$3(x - \frac{1}{3})(x + 1) = (3x - 1)(x + 1) = 3x^2 + 3x - x - 1 = 3x^2 + 2x - 1 = f(x) \text{ donc } 3(x - \frac{1}{3})(x + 1)$$

est bien la forme factorisée de  $f(x)$

## Exercice 3 :

1. Montrer que -2 est une racine du polynôme du second degré  $f(x) = 4x^2 + 7x - 2$
2. En déduire la valeur de sa deuxième racine.

## Correction

1.  $f(-2) = 4 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) - 2 = 4 \times 4 - 14 - 2 = 16 - 14 - 2 = 0$  donc -2 est bien une racine de  $f$ .

2.  $x_1 = -2$  est une racine de  $f$  donc la deuxième racine  $x_2$  vérifie

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{4} \text{ donc } -2 + x_2 = \frac{-7}{4} \text{ donc } x_2 = \frac{-7}{4} + 2 = \frac{-7}{4} + \frac{8}{4} = \frac{1}{4}$$

ou bien

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \text{ donc } x_2 = \frac{\frac{-1}{2}}{-2} = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{-2} = \frac{1}{4}$$

Exercice 4 :

Sans aucun calcul, résoudre  $-5(x-3)(x+2) < 0$

Correction

On dresse le tableau de signe du produit  $-5(x-3)(x+2)$

$$\begin{array}{ll} x-3=0 \Leftrightarrow x=3 & x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \\ x-3>0 \Leftrightarrow x>3 & x+2>0 \Leftrightarrow x>-2 \\ x-3<0 \Leftrightarrow x<3 & x+2<0 \Leftrightarrow x<-2 \end{array}$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$3$	$+\infty$	
$-5$	-	-	-	-	
$x-3$	-	-	0	+	
$x+2$	-	0	+	+	
$-5(x-3)(x+2)$	-	0	+	0	-

Conclusion :  $S = ]-\infty; -2[ \cup ]3; +\infty[$

Exercice 5 :

Déterminer la forme canonique de  $f(x) = -x^2 + 4x - 7$ .

Correction

$f(x) = -x^2 + 4x - 7$  est un polynôme du second degré avec  $a = -1; b = 4$  et  $c = -7$ .

Sa forme canonique est donc de la forme  $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$  avec

$$a = -1 ; \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ et } \beta = f(\alpha) = f(2) = -2^2 + 4 \times 2 - 7 = -4 + 8 - 7 = -3$$

d'où  $f(x) = -(x-2)^2 - 3$  est la forme canonique de  $f(x) = -x^2 + 4x - 7$

Exercice 6 :

A l'aide des identités remarquables et sans utiliser les formules de calculs de  $\alpha$  et de  $\beta$ , déterminer la forme canonique de  $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$ .

Correction

$$f(x) = 2x^2 - 20x + 10 = 2(x^2 - 10x) + 10 = 2[(x-5)^2 - 5^2] + 10$$

$$f(x) = 2[(x-5)^2 - 25] + 10 = 2(x-5)^2 - 50 + 10 = 2(x-5)^2 - 40$$

$$f(x) = 2(x-5)^2 - 40 \text{ est la forme canonique de } f(x) = 2x^2 - 20x + 10.$$

**Exercice 7 :**

Pour chacune des fonctions polynômes du second degré suivantes, précisez, si possible, la nature de sa forme (développée, factorisée, canonique, autre...)

- $f(x) = 4x^2 - x + 7$  forme :
- $g(x) = (x-1)(x-7)$  forme :
- $h(x) = -4(2-x)(x-5)$  forme :
- $i(x) = 5x - x^2 + 10$  forme :
- $j(x) = 4(x-7)^2 + 13$  forme :
- $k(x) = 5[(x-1)^2 - 3]$  forme :
- $l(x) = (2x-1)(x+4)$  forme :

**Correction**

- $f(x) = 4x^2 - x + 7$  forme : développée
- $g(x) = (x-1)(x-7)$  forme : factorisée
- $h(x) = -4(2-x)(x-5)$  forme : factorisée
- $i(x) = 5x - x^2 + 10$  forme : développée
- $j(x) = 4(x-7)^2 + 13$  forme : canonique
- $k(x) = 5[(x-1)^2 - 3]$  forme : autre
- $l(x) = (2x-1)(x+4)$  forme : autre

**Exercice 8 :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , les équations suivantes :

$6x^2 - x - 1 = 0$	$x^2 - 5x + 7 = 0$	$4x^2 - 4x + 1 = 0$
--------------------	--------------------	---------------------

**Correction**

Résolution de l'équation du second degré  $6x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 1 + 24 = 25 = 5^2 > 0$  donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{12} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Résolution de l'équation du second degré  $x^2 - 5x + 7 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$  donc l'équation n'admet aucune solution.

Résolution de l'équation du second degré  $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$  donc l'équation admet une solution :  $\frac{1}{2}$

**Exercice 9 :**

Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

**Correction**

$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$  est une fonction polynôme du second degré avec  $a = 2$  et  $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$   
 donc  $f$  est décroissante sur  $]-\infty; \alpha]$  et croissante sur  $[\alpha; +\infty[$ .

**Exercice 10 :**

Factoriser, si possible  $f(x) = 4x^2 + 19x - 5$

**Correction**

$f(x) = 4x^2 + 19x - 5$  est une fonction polynôme du second degré.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 361 + 80 = 441 = 21^2 > 0$$

donc  $f$  est factorisable sous la forme  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

avec  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19 - 21}{8} = \frac{-40}{8} = -5$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19 + 21}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Conclusion :  $f(x) = 4(x + 5)(x - \frac{1}{4})$

**Exercice 11 :**

1. Déterminer le signe du polynôme  $f(x) = 4x^2 + 19x - 5$
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $-x^2 + x + 6 > 0$

**Correction**

1. Signe de la fonction polynôme du second degré  $f(x) = 4x^2 + 19x - 5$

Nous avons vu à l'exercice précédent que  $\Delta = 441 = 21^2 > 0$  et par conséquent  $f$  admet deux racines distinctes  $x_1 = -5$  et  $x_2 = \frac{1}{4}$  avec  $a = 4 > 0$ .

On déduit que  $f(x) = 4x^2 + 19x - 5$  est strictement positive à l'extérieur de ses racines c'est à dire sur  $]-\infty; -5[ \cup ]\frac{1}{4}; +\infty[$ , strictement négative à l'intérieur de ses racines c'est à dire sur

$$]-5; \frac{1}{4}[ \text{ et s'annule en } x_1 = -5 \text{ et } x_2 = \frac{1}{4}$$

2. Résoudre de l'inéquation du second degré  $-x^2 + x + 6 > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25 = 5^2 > 0 \text{ donc le polynôme du second degré}$$

$$g(x) = -x^2 + x + 6 \text{ admet deux racines distinctes } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{(-2)} = \frac{-6}{(-2)} = 3 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{(-2)} = \frac{4}{(-2)} = -2.$$

Or  $a = -1$  donc  $g(x) = -x^2 + x + 6$  est strictement négative à l'extérieur de ses racines c'est et strictement positive à l'intérieur de ses racines.

On déduit que  $-x^2 + x + 6 > 0$  pour  $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]3; +\infty[$