

Chapitre 12 : Combinatoire & dénombrement

I. Dénombrement

1. Principe additif et principe multiplicatif

Principe additif : Soit n et m deux entiers naturels.

Si E et F sont deux ensembles contenant respectivement n et m éléments et si E et F sont **disjoints** (c'est à dire n'ayant aucun élément commun), alors le nombre d'éléments de la réunion $E \cup F$ est $n+m$.

Exemple : Soit $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$ deux ensembles.

- E et F sont disjoints.
- E et F contiennent respectivement deux et trois éléments.

D'après le principe additif l'ensemble $E \cup F$ contient donc $2+3=5$ éléments.

Vérification : $E \cup F = \{a, b, c, 1, 2\}$ contient bien cinq éléments.

Définition : L'ensemble $E \times F$, appelé **produit cartésien**, est l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple : Soit $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$ deux ensembles. On a :

$$E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

Principe multiplicatif

Soit n et m deux entiers naturels.

Si E et F sont deux ensembles contenant respectivement n et m éléments alors le nombre d'éléments du produit cartésien $E \times F$ est $n \times m$.

Exemple : Soit $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$ deux ensembles.

D'après le principe multiplicatif, le produit cartésien $E \times F$ contient $3 \times 2 = 6$ éléments.

Vérification : $E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$ contient bien six éléments.

Exercice 1 : Soit $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$ deux ensembles.

Déterminer le nombre d'éléments de $E \cup F$ puis de $E \times F$

Exercice 2 : Un restaurant propose une formule « plat + dessert ».

Un client peut choisir son plat parmi trois viandes et deux poissons puis son dessert parmi quatre proposés. Déterminer le nombre de menus différents que l'on peut réaliser.

2. Parties et k-uplets d'un ensemble

Définitions :

- Une **partie** ou **sous-ensemble** d'un ensemble E est un ensemble d'éléments de E .
- On appelle **k-uplets** ou **k-listes** d'un d'un ensemble E , une **collection ordonnée de k éléments** de E .

Remarques :

- Une partie de E se note avec des accolades c'est à dire sous la forme $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$.
- Un k-uplet se note avec des parenthèses c'est à dire sous la forme (e_1, e_2, \dots, e_k) .

Exemples :

- Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Les parties de E sont les sous-ensembles : $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$
- Un code de carte bleue est un 4-uplet de l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Un mot de 6 lettres peut être considéré comme un 6-uplet de l'alphabet

Remarques :

- Un 2-uplet se nomme un couple et un 3-uplet se nomme un triplet.
- Dans un k-uplet, l'ordre des éléments intervient alors que dans une partie, l'ordre n'intervient pas. De ce fait, $(a, b) \neq (b, a)$ alors que $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- Dans un k-uplet, les éléments peuvent être identiques.. (a, a) est un couple alors que dans une partie de E , $\{a, a\} = \{a\}$ est un singleton.

Propriétés :

- Si E est un ensemble de n éléments alors le nombre de parties de E est égal à 2^n
- Si E est un ensemble de n éléments alors le nombre de k-uplets de E est égal à n^k

Exemples : $E = \{a, b\}$ est un ensemble de deux éléments.

- Le nombre de parties de E est $2^2 = 4$.
En effet, les parties de E sont les sous-ensembles $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$
- Le nombre de triplets de E est $2^3 = 8$.
En effet, les triplets de E sont $(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a)$ et (b, b, b) .

Exercice 3 : Les numéros de mobile qui commencent par 06 sont composés du couple (0, 6) complété par un 8-uplet de $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- Déterminer le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 06.
- Combien de numéros de téléphone commençant par 06 ou 07 sont possibles ?

Exercice 4 : Pour sécuriser son compte sur un site internet, on doit créer un mot de passe (mdp) composé de 7 lettres parmi les 26 de l'alphabet. Combien de mdp différents peut-on ainsi créer ?

II. Arrangements et permutations

1. Arrangements

Définition : Soit n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$ et E un ensemble à n éléments.

On appelle **k -uplets d'éléments distincts de E ou k -arrangements**, tout k -uplets de E pour lequel tous les éléments sont différents.

Exemple : Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors (a, b, c) , (b, a, d) et (d, b, c) sont des 3-arrangements de E alors que (a, b, b) n'en est pas un.

Propriété : Soit n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$ et E un ensemble à n éléments. Le nombre de **k -arrangements** de E est égal à $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$.

Exemples :

- Si $E = \{a, b, c, d\}$ donc le nombre de 2-arrangements de E est $4 \times 3 = 12$.
En effet les couples d'éléments distincts de E sont :
 $(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)$
- Lors d'une course de 100 mètres nage libre disputée par 8 nageurs, le nombre de podiums possibles est $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.
En effet 8 possibilités pour la première place, 7 possibilités pour la 2ème et 6 possibilités pour la 3ème.

Exercice 5 : Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$. Combien y a-t-il de triplets d'éléments distincts de E ?

Exercice 6 : Dans le championnat de rugby TOP14, les six premières équipes qui ont le plus de points à la fin de la saison régulière passent à la deuxième phase du championnat.

- Combien de classement composé de six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles ?
- Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la phase régulière. Combien de classements possibles composés de six équipes de cette phase régulière étaient possibles avec le Stade Toulousain en tête ?

2. Permutations

Définition : Soit n un entier naturel et E un ensemble à n éléments.

On appelle **permutations** de E tous les **n -uplets d'éléments distincts** de E .

Remarque : autrement dit, une permutation de E est un k -uplets de E qui utilise tous les éléments de E une seule fois.

Exemple : Si $E = \{a, b, c\}$ alors les permutations de E sont :
 $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$

Propriété: Si E est un ensemble de n éléments alors le nombre de permutations est égal à $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

Définition: Ce nombre $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ de permutations s'écrit $n!$ et se lit « factorielle n », autrement dit, « factorielle n » est le produit de tous les entiers compris entre 1 et n .

Exemples :

- Il y a $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ permutations d'un ensemble de 4 éléments.
- Lors d'une course de 100 mètres nage libre disputée par 8 nageurs, il y a $8! = 40320$ ordres d'arrivée possibles.

Remarque : Par conventions $0! = 1$

Propriété: Pour tout entier n strictement positif, $n! = n \times (n-1)!$.

Propriété: Soit n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$ et E un ensemble à n éléments. Le nombre de k -arrangements de E est égal à $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Exemple : Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors il y a $\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 4 \times 3 = 12$

2-arrangements de E .

Remarque : D'après la formule, le nombre de n -arrangements d'un ensemble E à n éléments est

$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \quad , \text{ on retrouve bien le nombre de permutations de } E.$$

Exercice 7 : Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Combien de permutations de E peut-on réaliser ?

Exercice 8 : On reprend le contexte de l'exercice 6.

- Combien de classements des 14 équipes de la première phase du TOP14 sont possibles ?
- Lors de la saison 2018-2019, le Stade Toulousain a fini premier de la phase régulière suivi de Clermont-Ferrand. Combien de classements de ce championnat sont alors possibles ?

III. Combinaisons

Définition: Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$ et E un ensemble à n éléments. Une **combinaison** de k éléments de E est une **partie** (ou sous-ensemble) de E à k éléments. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments parmi les n éléments de E .

Exemple : Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors les combinaisons de 2 éléments de E sont $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$ et $\{c, d\}$: il y en a 6 donc $\binom{4}{2} = 6$.

Remarques :

- Dans une combinaison, il n'y a pas de répétition possible d'un élément de E car c'est un sous-ensemble au contraire d'un k -uplet. Dans une combinaison l'ordre n'intervient pas au contraire d'un k -uplet.
- Le nombre de combinaisons $\binom{n}{k}$ correspond au coefficient binomial déjà vu en probabilités notamment sur la Loi Binomiale. On va donc retrouver un certain nombre de propriétés.
- Par convention $\binom{0}{0} = 1$.

Propriétés : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$.

(a)
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(b) **Symétrie :** On a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. En particulier $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

(c) **Formule de Pascal :** on a pour $0 \leq k \leq n-1$
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

(d)
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Preuve exigible au programme :

(a) Admise

(b)
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et } \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ donc } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(c) Formule de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \times [(k+1) + (n-k)]$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \times (n+1) = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

(d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$: par définition, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments de E, autrement dit, le nombre de parties de E composées de k éléments. Ainsi, d'après le principe additif, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ est égal au nombre total de parties de E qui est égal à 2^n d'après I) 2) donc $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ #

Rappels sur le triangle de Pascal

Pour calculer à la main les coefficients binomiaux, on peut utiliser la formule avec les factorielles ou la formule de Pascal que l'on peut représenter sous la forme du tableau ci-dessous appelé le triangle de Pascal.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6

- Sinon, on peut utiliser la calculatrice ou le tableur :
 - Sur Casio : Appuyer sur OPTN puis choisir PROB puis nCr
 - Sur Texas : Appuyer sur MATH puis choisir PRB puis Combinaison
 - Sur le tableur : Il faut utiliser la fonction COMBIN

Exercice 9 : Calculer

- (a) $\binom{7}{3}$ puis $\binom{7}{4}$
- (b) $\binom{5}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 5$
- (c) $\binom{20}{12}$ à l'aide de la calculatrice.

Exercice 10 : On dispose d'un jeu de 32 cartes. Une « main » de quatre cartes est composée d'un ensemble de quatre cartes dont l'ordre n'importe pas.

- (a) Combien de « mains » de 4 cartes peut-on former ?
- (b) On tire simultanément 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir les 4 as ?

Exercice 11 : Dix amis dont Hugo et Kyllian se partagent au hasard en deux équipes de 5 joueurs pour faire un match de foot à cinq.

- (a) Combien d'équipes comportant Hugo et Kyllian peut-on former ?
- (b) Si les deux équipes sont composées, au hasard, quelle est la probabilité, arrondie à 0,01 près, qu'Hugo et Kyllian soient ensemble ?