Exercice 1 : Soit $E=\{a,b\}$ et $F=\{1,2,3,4\}$ deux ensembles. Déterminer le nombre d'éléments de $E\cup F$ puis de $E\times F$.
Correction E et F contiennent respectivement 2 et 4 éléments et sont disjoints. Le nombre d'éléments de $E\cup F$ est donc 2 + 4 = 6 et le nombre d'éléments de $E\times F$ est 2 x 4 = 8.

Exercice 2 : Un restaurant propose une formule « plat + dessert ». Un client peut choisir son plat parmi trois viandes et deux poissons puis son dessert parmi quatre proposés. Déterminer le nombre de menus différents que l'on peut réaliser.
Correction Il y a 5 plats (P) différents et 4 desserts (D) différents. Le choix d'un menu est un couple du produit cartésien P x D. Les ensembles P et D des plats et des desserts étant deux ensembles disjoints, on déduit que le nombre de menus possibles est 5 x 4 = 20.

Exercice 3 : Les numéros de mobile qui commencent par 06 sont composés du couple (0 , 6) complété par un 8-uplet de $E=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. **(a)** Déterminer le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 065. **(b)** Combien de numéros de téléphone commençant par 06 ou 07 sont possibles ?
Correction **(a)** Le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 06 est égal au nombre de 8-uplets de $E=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Il y a donc 10^8 numéros de téléphone commençant par 06. **(b)** Il y a également 10^8 numéros de téléphone commençant par 07 (raisonnement analogue) donc le nombre de numéros de téléphone commençant par 06 ou 07 est $10^8 + 10^8 = 2 \times 10^8$.

Exercice 4 : Pour sécuriser son compte sur un site internet, on doit créer un mot de passe (mdp) composé de 7 lettres parmi les 26 de l'alphabet. Combien de mdp différents peut-on ainsi créer ?
Correction Un mdp peut être considéré comme un 7-uplet de l'ensemble des lettres de alphabet qui comporte 26 éléments. Un mdp n'ayant pas nécessairement de sens, il y a donc 26^7 = 8 031 810 176 mdp différents.

Exercice 5 : Soit $E=\{a,b,c,d,e\}$. Combien y a-t-il de triplets d'éléments distincts de E ?
Correction L'ensemble E comporte 5 éléments. Il y a donc 5 x 4 x 3 = 60 triplets d'éléments distincts de E .

Exercice 6 : Dans le championnat de rugby TOIP14,, les six premières équipes qui ont le plus de points à la fin de la saison régulière passent à la deuxième phase du championnat.

(a) Combien de classement composé de six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles ?

(b) Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la phase régulière. Combien de classements possibles composés de six équipes de cette phase régulière étaient possibles avec le Stade Toulousain en tête ?

Correction

(a) Le nombre de classements des 6 premières équipes possibles est donc égal au nombre de 6-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à) 14 éléments.
Il y a donc 14 x 13 x 12 x 11 x 10 x 9 = 2 162 160 classements différents possibles.

(b) Le premier du classement étant fixé, on complète alors le classement par 5 équipes parmi les 13 restants. Il y donc 13 x 12 x 11 x 10 x 9 = 154 440 classements possibles avec le Stade Toulousain premier.

Exercice 7 : Soit $E=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
Combien de permutations de E peut-on réaliser ?

Correction

E comporte 10 éléments donc le nombre de permutations de E est 10! = 3 628 800.

Exercice 8 : On reprend le contexte de l'exercice 6.

(a) Combien de classements des 14 équipes de la première phase du TOP14 sont possibles ?

(b) Lors de la saison 2018-2019, le Stade Toulousain a fini premier de la phase régulière suivi de Clermont-Ferrand. Combien de classements de ce championnat sont alors possibles ?

Correction

(a) Un classement de la première phase du TOP14 est une permutation de l'ensemble des 14 équipes. Il y donc 14! = 87 178 291 200 classements différents pour la première phase.

(b) Les deux premières places étant fixées, il suffit de classer 12 équipes restantes de la 3ème place à la 14ème place. Il y a donc 12! = 479 001 600 classements différents avec le Stade Toulousain premier et Clermont-Ferrand deuxième.

Exercice 9 : Calculer

(a) $\binom{7}{3}$ puis $\binom{7}{4}$

(b) $\binom{5}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k \leqslant 5$

(c) $\binom{20}{12}$ à l'aide de la calculatrice.

Correction

(a) $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35$

$\binom{7}{4} = \binom{7}{7-3} = \binom{7}{3} = 35$ par symétrie

(b) Par symétrie, on a $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$; $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$; $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

(c) $\binom{20}{12} = 125970$ à l'aide de la calculatrice.

Exercice 10 : On dispose d'un jeu de 32 cartes. Une « main » de quatre cartes est composée d'un ensemble de quatre cartes dont l'ordre n'importe pas.

(a) Combien de « mains » de 4 cartes peut-on former ?

(b) On tire simultanément 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir les 4 as ?

Correction

(a) Une « main » de quatre cartes est une combinaison de 4 éléments de l'ensemble des 32 cartes du paquet.

Il y a donc $\binom{32}{4} = \frac{32!}{28! \times 4!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35960$ mains de 4 cartes possibles.

(b) On tire simultanément 4 cartes au hasard donc toutes les mains sont équiprobables.

Ainsi, la probabilité d'obtenir une main composée de 4 as vaut $\frac{1}{35960}$.

Exercice 11 : Dix amis dont Hugo et Kyllian se partagent au hasard en deux équipes de 5 joueurs pour faire un match de foot à cinq.

(a) Combien d'équipes comportant Hugo et Kyllian peut-on former ?

(b) Si les deux équipes sont composées, au hasard, quelle est la probabilité, arrondie à 0,01 près, qu'Hugo et Kyllian soient ensemble ?

Correction

(a) Dénombrer les équipes de 5 joueurs contenant Hugo et Kyllian revient à dénombrer les équipes de 3 joueurs qu'on peut former à partir des 8 joueurs restants.

Il y a donc $\binom{8}{3}=\frac{8!}{5!\times 3!}=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=8\times 7=56$ équipes possibles comportant Hugo et Kyllian.

(b) Le nombre d'équipes différentes de 5 joueurs qu'on peut former à partir des 10 amis est $\binom{10}{5}=252$. Les équipes étant réalisées au hasard, leurs probabilités de se réaliser sont équiprobables. Or, d'après le (a), il y a 56 équipes qui comportent à la fois Hugo et Kyllian. On déduit que la probabilité qu'une équipe réalisée au hasard comporte à la fois Hugo et Kyllian vaut $\frac{56}{252}=\frac{2}{9}\approx 0{,}22$.