Sujet A

$(E) : \quad 25x' + 200x'' = 50$

1) x est solution de (E) $\iff 25x' + 200x'' = 50$

$\iff 200x'' = -25x' + 50$

$\iff x'' = \dfrac{-25}{200}x' + \dfrac{50}{200}$

$\iff x'' = -\dfrac{1}{8}x' + \dfrac{1}{4}$

$\iff v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$

$\iff v$ solution de $(F) : v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$

Resolution de $(F) : v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$

solution particulière constante : $v_0(t) = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{8}} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{8}{1} = 2$

solution de l'equation homogène associé : $v' = -\dfrac{1}{8}v$

$v_1(t) = C e^{-\frac{1}{8}t}$

<u>Conclusion</u> : solutions de (F) : $v(t) = v_1(t) + v_0(t)$

$v(t) = C e^{-\frac{1}{8}t} + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$

2) a) $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

$\forall t \geq 0, \quad x'(t) = v(t) = C e^{-\frac{1}{8}t} + 2$

or $x'(0) = 0$ donc $C e^{-\frac{1}{8} \times 0} + 2 = 0$

$C \times 1 + 2 = 0$

$C = -2$

<u>Conclusion</u> : $x'(t) = v(t) = -2e^{-\frac{1}{8}t} + 2$

b) $\forall t \geq 0,\quad x'(t) = -2\, e^{-\frac{1}{8}t} + 2$

donc $x(t) = -2 \times \dfrac{e^{-\frac{1}{8}t}}{-\frac{1}{8}} + 2t + K \quad (K \in \mathbb{R})$

$x(t) = 16\, e^{-\frac{1}{8}t} + 2t + K$

or $x(0) = 0$ donc $16 + K = 0$ donc $K = -16$

<u>Conclusion</u> : $x(t) = 16\, e^{-\frac{1}{8}t} + 2t - 16$

3) a) $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} x'(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} -2e^{-\frac{1}{8}t} + 2 = 2$

par composée de limites avec :

$\lim\limits_{t \to +\infty} -\frac{1}{8}t = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

d'où $V = \lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 2$

b) On cherche $t \geq 0$ pour lequel $v(t) = \dfrac{90}{100} \times 2 = 1{,}8$

$v(t) = 1{,}8 \iff -2e^{-\frac{1}{8}t} + 2 = 1{,}8$

$\iff -2e^{-\frac{1}{8}t} = -0{,}2$

$\iff e^{-\frac{1}{8}t} = 0{,}1$

$\iff -\frac{1}{8}t = \ln(0{,}1)$

$\iff t = -8\ln(0{,}1) = -8\ln(10^{-1}) = \ln(10^{8})$

$\iff t = 8\ln(10) \simeq 18\ \text{s}.$

4) $x(0) = 0$. Au bout de 30 s, le chariot a parcouru

$x(30) = 16 \times e^{-\frac{30}{8}} + 2 \times 30 - 16 = 16 \times e^{-3{,}75} + 44$

$x(30) \simeq 44{,}4$ m arrondi au dm.

Sujet B

1) a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$

$$\text{donc} \quad (f'(x))^2 = 1 + (f'(x))^2 \geq 1$$

$$\text{donc} \quad f'(x) \neq 0$$

b) $f'(0) = 1$ et $(f'(0))^2 - (f(0))^2 = 1$

$$\text{donc} \quad (f(0))^2 = (f'(0))^2 - 1 = 0$$

$$\text{donc} \quad f(0) = 0$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$

or f et f' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé et le (3)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2 f''(x) f'(x) - 2 f'(x) f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 f'(x) \left(f''(x) - f(x) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 f'(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f''(x) - f(x) = 0$$

Or d'après le 1) a), $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $\quad f''(x) - f(x) = 0$

3) On pose $\quad u = f' + f \quad$ et $\quad v = f' - f$

a) $u(0) = (f' + f)(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1$

$v(0) = (f' - f)(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1$

b) u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$u' = (f' + f)' = f'' + f'$

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - f(x) = 0$ d'après le 2) donc $f'' = f$

d'où $\quad u' = f + f' = u$

v est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$v' = (f'-f)' = f''-f'$

$v' = f - f' = -(f'-f) = -v$ d'après le 2) $f''=f$

c) $u' = u$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = C e^{x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

or $u(0) = 1$ donc $C \times e^{0} = 1$

$C \times 1 = 1$

$C = 1$

Conclusion : $u(x) = e^{x}$

$v' = -v$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) = C e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

or $v(0) = 1$ donc $C \times e^{0} = 1$

$C = 1$

Conclusion : $v(x) = e^{-x}$

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = f'(x) + f(x)$

$v(x) = f'(x) - f(x)$

donc $u(x) - v(x) = 2f(x)$ donc $f(x) = \dfrac{u(x)-v(x)}{2} = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

4) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ par somme de limites avec $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par somme des mêmes limites.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $2f'(x) = u(x) + v(x) = e^{x} + e^{-x} \geq 0$

donc $f'(x) \geq 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

Sujet C

1) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que la pente de toute tangente est égale au double de la somme des coordonnées du point.

Soit $A(x; f(x))$ un point de C_f

La pente de T_A vaut $f'(x)$.

On souhaite donc $f'(x) = 2\left(x + f(x)\right)$ pour tout x réel.

donc f est une solution de l'équation différentielle

(E) : $y' = 2y + 2x$ car $2(x+f(x)) = 2x + 2f(x)$
$= 2f(x) + 2x$

2) Soit $f(x) = ax + b$ une solution affine de (E).

f vérifie $a = 2(ax+b) + 2x = (2a+2)x + 2b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = -1 \end{cases}$

Conclusion : $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E)

3) Les solutions de l'équation homogène associée à (E) qui est $y' = 2y$ sont les fonctions $g(x) = Ce^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

On déduit que les solutions de (E) sont les fonctions h définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $h(x) = Ce^{2x} - x - \frac{1}{2}$ pour tout x réel

4) a) $A(0; \frac{1}{2}) \in C_g$ avec g solution de (E) donc $g(0) = \frac{1}{2}$

$g(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C \times e^{2\times 0} - 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow C - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow C = 1$

Conclusion : $g(x) = e^{2x} - x - \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - x - \frac{1}{2} = +\infty$ par somme de limites

avec $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty \text{ et } \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x - \frac{1}{2} = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - x - \frac{1}{2}$ est une F.I. du type $\infty - \infty$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - x - \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{2x}}{x} - 1 - \frac{1}{2x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2x\,\frac{e^{2x}}{2x} - 1 - \frac{1}{2x}\right) = +\infty$

avec $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty \text{ et } \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^{X}}{X} = +\infty \text{ par croissance comparée} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2e^{2x} - 1$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2x = -\ln(2)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\ln(2)}{2}$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\frac{\ln(2)}{2}$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{\ln(2)}{2}$

On déduit le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\frac{\ln(2)}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\ln(2)}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$g\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right) = e^{2\times -\frac{\ln(2)}{2}} + \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}$

$= \frac{\ln(2)}{2}$

2|2

Sujet D

(E) : $y' = -0{,}124\, y$

1) Les solutions de (E) sont les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = C\, e^{-0{,}124x}$

2) $f(0) = 15{,}3 \iff C\, e^{-0{,}124 \times 0} = 15{,}3 \iff C = 15{,}3$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 15{,}3\, e^{-0{,}124x}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 15{,}3\, e^{-0{,}124x} = 0$ par composition de limites

avec $\lim\limits_{x \to +\infty} -0{,}124x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$

Cela signifie que la concentration de carbone sera quasiment nulle après un très grand nombre d'années

4) On cherche t (en milliers d'années) tel que $f(t) = 7{,}27$

$\iff 15{,}3\, e^{-0{,}124t} = 7{,}27$

$\iff e^{-0{,}124t} = \dfrac{7{,}27}{15{,}3}$

$\iff \ln\left(e^{-0{,}124t}\right) = \ln(7{,}27) - \ln(15{,}3)$

$\iff -0{,}124t = \ln(7{,}27) - \ln(15{,}3)$

$\iff t = \dfrac{\ln(15{,}3) - \ln(7{,}27)}{0{,}124} \simeq 6$

$\iff t \simeq 6000$ ans

5) $15{,}3 \times \dfrac{0{,}3}{100} = 0{,}0459$

On cherche $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = 0{,}0459$

$f(t) = 0{,}0459 \iff 15{,}3\, e^{-0{,}124t} = 0{,}0459$

$\iff e^{-0{,}124t} = \dfrac{0{,}0459}{15{,}3} = 0{,}003$

$\iff -0{,}124t = \ln(0{,}003)$

$\iff t = \dfrac{\ln(0{,}003)}{-0{,}124} \simeq 46{,}8$

$\iff t \simeq 46\,800$ ans.

1/1

Sujet E

(E) : $y' + \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}$ pour $t \geq 0$

1) $u(t) = a t e^{-\frac{1}{2}t}$ solution de (E)

$\Leftrightarrow \left(a e^{-\frac{1}{2}t} + at \times \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}\right)\right) + \frac{1}{2} at\, e^{-1/2 t} = \frac{1}{2} e^{-1/2 t}$

$\Leftrightarrow e^{-1/2 t} \left(a - \frac{1}{2} at + \frac{1}{2} at \right) = \frac{1}{2} e^{-1/2 t}$

$\Leftrightarrow a = 1/2$

Conclusion : $u(t) = \frac{1}{2} t e^{-1/2 t}$

2) a) . $u(t) = \frac{1}{2} t e^{-1/2 t}$ est une solution particulière de (E)

. L'équation homogène associée est $y' = -\frac{1}{2} y$ qui admet pour solutions les fonctions $v(t) = C e^{-1/2 t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

. On déduit que les solutions de (E) sont de la forme

$g(t) = v(t) + u(t) = C e^{-1/2 t} + \frac{1}{2} t e^{-1/2 t}$

or $g(0) = 0$ donc $C e^{-1/2 \times 0} = 0$ donc $C = 0$

donc $g(t) = u(t) = \frac{1}{2} t e^{-1/2 t}$

b) $\lim_{t \to +\infty} g(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} t e^{-1/2 t} = \lim_{t \to +\infty} - \left(-\frac{1}{2} t\right) e^{-1/2 t} = 0$

par croissances comparées avec $\lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{2} t = -\infty$

et $\lim_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$

donc la concentration devient nulle au fil du temps.

c) $\forall t \geq 0$, $g(t) = \frac{1}{2} t e^{-1/2 t}$

$g'(t) = \frac{1}{2} e^{-1/2 t} - \frac{1}{4} t e^{-1/2 t} = \frac{1}{4} e^{-1/2 t} (2 - t)$

$g'(t) = 0 \iff t = 2$

$g'(t) > 0 \iff 2 - t > 0 \iff 0 \leq t < 2$

$g'(t) < 0 \iff 2 - t < 0 \iff t > 2$

d'où le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$

t	0		2		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$g(2) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

3) a) g est décroissante strictement sur $[2; +\infty[$, continue car dérivable, à valeurs dans $[0; \frac{1}{e}]$ qui contient $0,1$ donc il existe un réel $\alpha \in [2; +\infty[$ pour lequel $g(\alpha) = 0,1$

En déduire qu'il existe un entier n pour lequel $g(n) \leq 0,1$

b) A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 7,15$ donc $n = 8$

c) L'animal absorbe le médicament à 8h donc pour 16h, la quantité de principe actif sera inférieure ou égale à $0,1$ mg.

Sujet F

1) $(E) : y' + 3y = 6 \iff y' = -3y + 6$

donc $f(x) = c\,e^{-3x} + 2$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{-3x} = 0$

donc C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $+\infty$.

réponse : VRAI

2)

$F(x) = 1 + \dfrac{\ln(x^2 + 2x)}{2}$ sur $]0 ; +\infty[$

$F'(x) = 0 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x + 2}{x^2 + 2x} = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x} = f(x)$

donc F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

réponse : VRAI

3) $(E)\ y' - 2y - 1 = 0 \iff y' = 2y + 1$

$\iff y(x) = e^{2x} - \dfrac{1}{2}$

$y'(x) = 2e^{2x} > 0$ donc y strictement croissante

réponse : FAUX

4) Soit $y(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

y est solution de $xy' - y = x + 1$

$\iff ax - (ax + b) = x + 1$

$\iff -b = x + 1$ impossible

réponse : FAUX

5) $(E) : y' + 2y = 4$

$\Leftrightarrow y' = -2y + 4$

$\Leftrightarrow y(x) = C e^{-2x} + 2$

or $y(0) = 0 \Leftrightarrow C \times e^{-2\times 0} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow C + 2 = 0$

$\Leftrightarrow C = -2$

d'où $y(x) = -2 e^{-2x} + 2$

- $y'(x) = 4 e^{-2x} > 0$ donc y est $\nearrow$ strictement
- $y(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2 e^{-2x} + 2 = 2$

Seule C_3 vérifie les 3 conditions

<u>réponse : VRAI</u>