Chapitre 10 : Primitives et équations différentielles

De nombreux phénomènes physiques peuvent être modélisés par une relation entre une fonction et sa dérivée. Rechercher cette fonction revient à résoudre une équation différentielle.

I. Primitives d'une fonction

1. Équation différentielle $y'=f$

Définition : Soit y une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y'=f$ sur I si et seulement si g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a $g'(x)=f(x)$.

Exemple : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2$ est une solution de l'équation différentielle $y'=2x$ sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x)=2x$.

Définition : Plus généralement, une équation différentielle du 1er ordre (ou d'ordre 1) est une équation dans laquelle intervient une fonction dérivable f et sa dérivée f' et la variable x.
L'inconnue est alors la fonction f.

Exemples : $y'=x^3+1; x y'+2y=e^x; 5y'+xy^2=\sin(x); 2y'-y=1$ sont des équations différentielles d'ordre 1.

Exercice 1 : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-3x+1$ est une solution de l'équation différentielle $y'=4x-3$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-2$ est une solution de l'équation différentielle $y'-2y=4$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Déterminer les réels a et b pour lesquels la fonction $f: x \to ax+b$ définie sur $\mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle $xy'+y=6x+1$ avec $x \in \mathbb{R}$.

2. Primitives d'une fonction

Définition : Toute solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y'=f$ s'appelle une primitive de f sur I.

Définition : Soit f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si, pour pour tout réel x de I, $F'(x)=f(x)$

Exemple : La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=x^2$ est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x$ car $\forall x\in\mathbb{R}, F'(x)=2x$.
La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=x^2+5$ est une autre primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque : la recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation.

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Preuve : sera démontrée dans le chapitre sur le calcul intégral. #

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

Preuve : Soit F et G *deux primitives de la fonction* f *sur I.*
Alors, pour tout réel x *de I, on a* $F'(x)=f(x)$ et $G'(x)=f(x)$.
On en déduit que $\forall x\in I, F'(x)=G'(x)\Leftrightarrow F'(x)-G'(x)=0\Leftrightarrow(F-G)'(x)=0$.
La fonction $F-G$ *a une dérivée nulle donc elle est constante sur I.*
Notons k *cette constante.*
On déduit que $\forall x\in I, F(x)-G(x)=k$. #

Propriété : Soit f une fonction admettant une primitive F sur I alors pour tout réel k la fonction définie sur I par $G(x)=F(x)+k$ est aussi une primitive de f sur I et toute primitive de f sur I est de ce type.

Preuve : *donc* G *est une primitive de* f *sur I.*
Soit H *une primitive de* f *sur I alors* $H(x)-F(x)=k$ *avec* $k\in\mathbb{R}$ *d'où* $H(x)=F(x)+k$ #

Exercice 4 : on considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x$ et $g(x)=(x-1)e^x$.

1. Démontrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
2. En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 : on considère les fonctions définies sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ et $g(x)=2x+5\ln(x-2)$.

1. Démontrer que g est une primitive de f sur $]2;+\infty[$.
2. En déduire toutes les primitives de f sur $]2;+\infty[$.

II. Recherche des primitives d'une fonction

1. Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction F	Intervalle de validité
$f(x)=a$	$F(x)=ax$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ pour $n\in\mathbb{Z}^*, n\neq -1$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n>0$ $\mathbb{R}^*$ si $n<0$ et $n\neq -1$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x)=\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=-\sin x$	$F(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$

Cas particuliers usuels :

- *une primitive de* $x \to x$ *est* $x \to \frac{1}{2}x^2$
- *une primitive de* $x \to x^2$ *est* $x \to \frac{1}{3}x^3$
- *une primitive de* $x \to a\cos(ax+b)$ *est* $x \to \sin(ax+b)$
- *une primitive de* $x \to -a\sin(ax+b)$ *est* $x \to \cos(ax+b)$
- *une primitive de* $x \to \frac{1}{a}e^{ax+b}$ avec $a \neq 0$ *est* $x \to e^{ax+b}$

Exercice 6 :

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+9$
2. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}$.

Exercice 7 :

1. Déterminer sur $]0;+\infty[$ une primitive de la fonction f définie par $f(x)=9x^2+\frac{7}{x^3}$
2. Déterminer sur $\mathbb{R}$ une primitive de la fonction g définie par $g(x)=\cos(3x)-4\sin(2x-1)$

2. Primitives de fonctions ayant des formes remarquables

u' et v' sont deux fonctions continues sur un intervalle I, k est un réel quelconque.

Fonction f	Fonction F	Intervalle de validité
$f=ku'$	$F(x)=ku$	I
$f=u'+v'$	$F=u+v$	I
$f=u'\times e^u$	$F=e^u$	I
$f=u'u^n$	$F(x)=\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$n\neq -1$ et $n\neq 0$ u ne s'annule pas sur I si $n<0$

Fonction f	Fonction F	Intervalle de validité
$f=\frac{u'}{u}$	$F=\ln u$	$u>0$ sur I
$f=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$F=\sqrt{u}$	$u>0$ sur I
$f=u'\cos u$	$F=\sin u$	I
$f=-u'\sin u$	$F=\cos u$	I

Preuve :
Il suffit de dériver les primitives pour obtenir les dérivées associées #

Cas particulier :

- *une primitive de* $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x)\neq 0$ *sur I* *est* $-\frac{1}{u}$

Exercice 8 :
Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

$f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$	$g(x)=20xe^{x^2+5}$	$h(x)=\cos^2(x)\sin(x)$	$i(x)=\frac{11x}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 9 :
Déterminer une primitive sur $[0;+\infty[$ de chacune des fonctions suivantes :

$f(x)=6x(x^2-1)^3$	$g(x)=\frac{5}{2x+3}$	$h(x)=e^{2x+1}$	$i(x)=\frac{2}{\sqrt{3x+4}}$

III. Équations différentielles $y'=ay$ et $y'=ay+f$

1. Équation différentielle $y'=ay$

Propriété : Soit a un réel.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay$ est l'ensemble des fonctions $x \rightarrow C e^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Preuve : Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=C e^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=C \times a e^{ax}=a \times C e^{ax}=a f(x)$ *donc* f *est bien une solution de l'équation différentielle* $y'=ay$.
Réciproquement, soit f *une solution de l'équation différentielle* $(E): y'=ay$ *et* g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x)=e^{-ax} \times f(x)$.
g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *comme produit de fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et*
$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x)=-a e^{-ax} \times f(x)+e^{-ax} \times f'(x)=e^{-ax}(f'(x)-a f(x))=0$ *donc* g *est constante.*
Notons C *cette constante. On a donc* $\forall x \in \mathbb{R}, C=e^{-ax} \times f(x)$ donc $f(x)=\frac{C}{e^{-ax}}=C e^{ax}$. #

Exemple : les solutions de l'équation différentielle $y'=2y$ sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions $x \rightarrow C e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 :
1. Résoudre l'équation différentielle $y'=-4y$.
2. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(2)=1$.

2. Équation différentielle $y'=ay+b$ et $y'=ay+f$

Définition : une équation différentielle de la forme $y'=ay+b, a \neq 0$ est appelée équation différentielle linéaire du 1[er] ordre à coefficients constants.

L'équation différentielle $y'=ay+b, a \neq 0$, a toujours une **solution particulière** constante.
En effet, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x)=-\frac{b}{a}$ est solution puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_0(x)=0 \text{ et } a f_0(x)+b=a \times \left(-\frac{b}{a}\right)+b=-b+b=0$$

Propriété : Soit a et b des réels avec $a \neq 0$.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E): y'=ay+b$ est l'ensemble des fonctions $x \rightarrow f(x)+f_0(x)$ où f est une solution de l'équation différentielle $y'=ay$ et f_0 la solution particulière de (E).

Preuve : On note :
A = {x → f(x) + f_0 (x) où f est une solution particulière de y'=ay et f_0 une solution particulière de (E)}
B = {solutions de y' = ay + b}

Montrons que A est inclus dans B

Soit g une fonction de A.
Pour tout réel x on a g(x) = f(x) + f_0 (x)donc g'(x) = f'(x) = a f(x) (1)
Comme f_0 est une solution particulière de (E) on a f'_0 (x) = a f_0 (x) + b (2)
Par addition (1) + (2) on obtient f'(x) + f'_0 (x) = a f(x) + a f_0 (x) + b = a (f(x) + f_0 (x)) + b
g'(x) = a g(x) + b
donc g appartient à B donc A est inclus dans B.

Montrons que B est inclus dans A
Soit h une fonction de B alors h'(x) = a h(x) + b
Soit f_0 une solution particulière de (E) donc f'_0 (x) = a f_0 (x) + b
Par soustraction, on obtient h'(x) – f'_0 (x) = a (h(x) – f_0 (x))
(h-f_0)' (x) = a (h-f_0) (x)
donc h – f_0 est une solution f de y' = a y

Ainsi, h – f_0 = f donc h = f + f_0 donc h appartient à A donc B est inclus dans A.

Conclusion : A = B #

Définition : l'équation différentielle $y'=ay$ est l'équation homogène associée à $(E): y'=ay+b$.

Exemple : On considère l'équation différentielle $(E): y'=2y+6$.

- La solution particulière est la fonction constante $f_0(x)=\frac{-6}{2}=-3$
- les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ce^{2x}$ avec $C\in\mathbb{R}$.

On déduit que l'ensemble des solutions de $(E): y'=2y+6$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \rightarrow Ce^{2x}-3$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Exercice 11 :
On considère l'équation différentielle $(E): y'=3y-2$.

1. Déterminer une solution particulière constante de (E) .
2. En déduire toutes les solutions de (E) .

Propriété admise : Soit $a\in\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un intervalle I.
Toute solution dans I de l'équation différentielle $(E): y'=ay+f$ est la somme d'une solution quelconque de l'équation différentielle $y'=ay$ et d'une solution particulière de (E) .

Exemple : On considère l'équation différentielle $(E): y'=2y+e^x$.

- Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction $f(x)=-e^x$ car $f'(x)=-e^x$ et $2f(x)+e^x=-2e^x+e^x=-e^x$
- les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ce^{2x}$ avec $C\in\mathbb{R}$ d'après l'exemple précédent.

On déduit que l'ensemble des solutions de $(E): y'=2y+e^x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x\rightarrow Ce^{2x}-e^x$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Exercice 12 :
On considère l'équation différentielle $(E): y'=y+x-3$

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x+2$ est une solution de (E) .
2. En déduire toutes les solutions de (E) .