

## Chapitre 11 : Calcul intégral

Au collège notamment, vous avez appris à calculer les aires des carrés, rectangles, trapèzes et autres. Dans ce chapitre, on définit un nouvel outil permettant de calculer de nouvelles aires...

### I. Intégrale d'une fonction positive

#### 1. Définition

**Définition :**

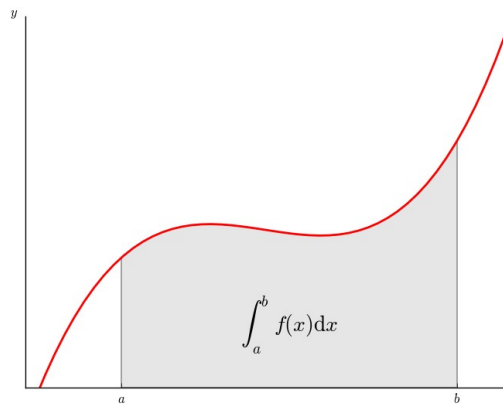
1. Dans un repère orthogonal  $(O;I,J)$ , on appelle **unité d'aire**, l'aire du rectangle de côté  $[OI]$  et  $[OJ]$ .
2. Soit  $f$  une fonction **continue et positive** sur un intervalle  $[a;b]$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On appelle **intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$** , l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x=a$  et  $x=b$ .

Cette aire est appelée « l'aire sous la courbe de  $f$  ».

Cette intégrale se note  $\int_a^b f(x)dx$  et se lit « **intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$**  ».

«  $a$  » est la **borne inférieure** de cette intégrale et «  $b$  » la **borne supérieure**.



Remarque : la notation  $\int$  est due au mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Exercice 1 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x)=x-3$  et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère  $(O;I,J)$

1. Représenter graphiquement les aires, en unité d'aire (u.a), égale aux intégrales

$$I = \int_3^4 f(x)dx \quad \text{et} \quad J = \int_4^5 f(x)dx$$

2. Calculer  $I$  et  $J$
3. Vérifier vos résultats à la calculatrice

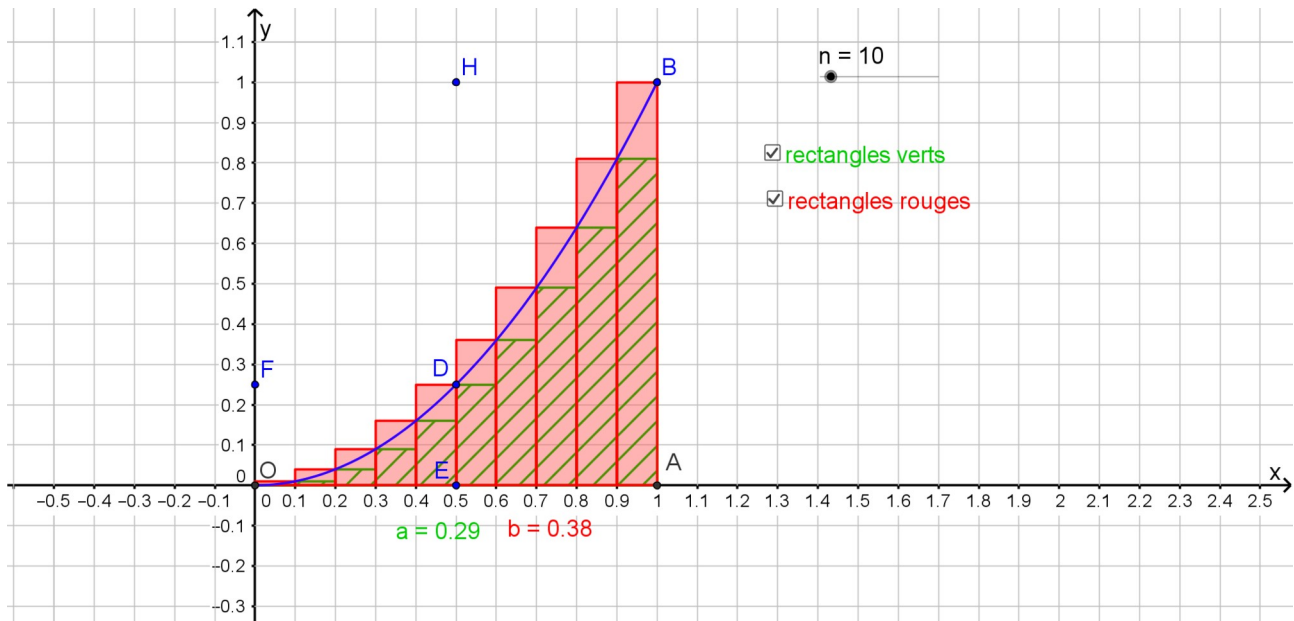
indication : en MODE RUN-MATH, utiliser la touche OPTN, choisir CALC puis  $\int dx$

## 2. Encadrement de l'intégrale d'une fonction positive

Pour déterminer une approximation de l'intégrale d'une fonction **continue monotone et positive** sur  $[a;b]$ , on peut partager  $[a;b]$  en  $n$  sous-intervalles de même amplitude  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Sur chacun des intervalles  $[x_k; x_{k+1}]$ , l'aire sous la courbe de  $f$  est comprise entre les aires de deux **rectangles** de hauteur  $f(x_k)$  et  $f(x_{k+1})$  et de largeur «égale à  $h$ ». On déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} h \times f(x_k) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} h \times f(x_{k+1})$$



On peut écrire un algorithme (ici pour  $f$  croissante) permettant d'afficher un encadrement de l'intégrale :

<b>Entrée</b>	
Saisir $a, b, n$	<i>On entre les bornes <math>a</math> et <math>b</math> et le nombre de sous intervalles <math>n</math></i>
<b>Traitement</b>	
$h$ prend la valeur $(b-a)/n$	<i>On calcule l'amplitude de chaque sous intervalle</i>
$x$ prend la valeur $a$	<i>On initialise les variables</i>
$u$ prend la valeur $0$	<i><math>u</math> désigne la somme des rectangles « inférieurs »</i>
$v$ prend la valeur $0$	<i><math>v</math> désigne la somme des rectangles « supérieurs »</i>
Pour $k$ allant de $0$ à $n-1$	
$u$ prend la valeur $u+h \times f(x)$	<i>Pour toutes les valeurs de <math>k</math>, on ajoute à <math>u</math> l'aire du rectangle « inférieur suivant » et à <math>v</math> l'aire du rectangle supérieur suivant.</i>
$x$ prend la valeur $x+h$	
$v$ prend la valeur $v+h \times f(x)$	
FinPour	
<b>Sortie</b>	
Afficher $u, v$	<i>On affiche les valeurs de <math>u</math> et de <math>v</math> qui encadrent l'intégrale</i>

Exercice 2 :

On considère la fonction  $\ln$  définie sur  $]0; +\infty[$  et  $C$  sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

- Exprimer l'aire de la surface délimitée par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=a$  et  $x=b$  avec  $1 < a < b$ .
- On partage l'intervalle  $[a; b]$  en  $n$  segments de même amplitude  $h$  et on note  $(u_n)$  la somme des aires des rectangles sous la courbe et  $(v_n)$  la somme des rectangles au-dessus de la courbe.
  - Exprimer  $h$  en fonction de  $a, b$  et  $n$ .
  - Écrire une fonction « rectangles » sous Python, de paramètres  $a, b$  et  $n$ , qui retourne un encadrement de l'aire située sous la courbe en unités d'aire.
- Avec l'appel `rectangles(2,3,50)` obtenir une valeur approchée de cette aire à 0,01 près.

**II. Intégrale d'une fonction continue**

**1. Théorème fondamental**

**Théorème :** Si  $f$  est une fonction continue et positive sur  $[a;b]$ , la fonction  $F$  définie sur  $[a;b]$  par  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est dérivable sur  $[a;b]$  et a pour dérivée  $f$ . On a ainsi :

$$\forall x \in [a;b], F'(x) = f(x)$$

*Preuve :* cas d'une fonction  $f$  strictement croissante et positive sur  $[a;b]$  :  
 Soit  $x$  et  $x+h$  deux réels de  $[a;b]$  avec  $h \in \mathbb{R}^*$ .

- Cas où  $h > 0$

On note  $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$  et  $F_a(x+h) = \int_a^{x+h} f(t) dt$ .

Comme  $f$  est positive sur  $[a;b]$ ,  $F_a(x+h) - F_a(x)$  est l'aire hachurée en rouge, en u.a. Cette aire est comprise entre les aires des rectangles MNPS et MNQR.  
 Comme  $f$  est croissante sur  $[a;b]$ , on a :

$$h \times f(x) \leq F_a(x+h) - F_a(x) \leq h \times f(x+h)$$

$$f(x) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x+h) \text{ car } h > 0.$$

Or  $f$  est continue sur  $[a;b]$  donc  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$  et d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = F_a'(x) = f(x)$$

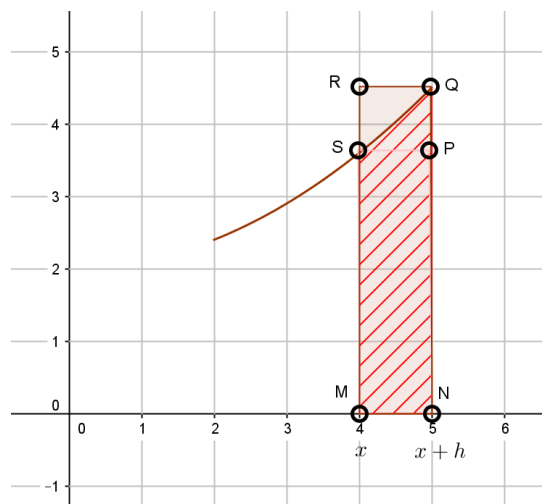
- Cas où  $h < 0$

De façon analogue, on a  $f(x+h) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x)$ . Or  $f$  est continue sur  $[a;b]$  donc

$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$  et d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = F_a'(x) = f(x)$$

On peut effectuer le même raisonnement pour  $h < 0$  donc la fonction  $F$  est dérivable en tout réel  $x$  de  $[a;b]$  et  $F'(x) = f(x)$  #



## 2. Calcul de l'intégrale d'une fonction continue

**Propriété** : Soit  $f$  une fonction **continue et positive** sur un intervalle  $[a;b]$ .

Si  $F$  est une **primitive** de  $f$  alors  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  .

*Preuve :*

On sait que la fonction  $G$  définie par  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$  est une primitive de  $f$ .

Si  $F$  est une autre primitive de  $f$  alors il existe un réel  $k$  tel que  $F(x) = G(x) + k$  pour tout  $x$  de  $[a;b]$ .

Or  $G(b) = \int_a^b f(t)dt$  et  $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$

donc  $F(b) - F(a) = (G(b) + k) - (G(a) + k) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt$  #

*Remarque* : cette formule s'étend aux fonctions continues de signes quelconques sur un intervalle  $I$  avec  $a$  et  $b$  réels quelconques dans  $I$  et on peut alors définir l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.

Exercice 3 :

Calculer  $I = \int_1^3 (3x^2 + 4x)dx$  et  $J = \int_{-1}^0 e^{3x} dx$  .

**Théorème** : Toute fonction **continue** sur un intervalle  $I$  admet des primitives.

On généralise le résultat précédent aux fonctions de signe quelconque sur un intervalle  $I$ .

**Définition** : Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle  $I$  et  $F$  une **primitive** de  $f$ ,  $a$  et  $b$  deux réels quelconques de  $I$ . On appelle intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  la différence  $F(b) - F(a)$  et on note :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exercice 4 :

1. Calculer  $I = \int_{-1}^4 (3x^2 + 4x + 1)dx$ ,  $J = \int_{-1}^0 e^{3x+1} dx$  et  $K = \int_0^\pi 3 \sin(2x)dx$  .

2. (a) Démontrer que la fonction  $F$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = x \ln(x) - x$  est une primitive de la fonction  $\ln$  sur  $]0; +\infty[$  .

(b) En déduire l'intégrale  $L = \int_1^e \ln(x)dx$  .

### III. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

**Propriétés :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions **continues** sur un intervalle  $I$ ,  $a, b, c$  trois réels de  $I$  et  $k$  un réel quelconque.

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

3. **Linéarité de l'intégrale :**

$$\blacksquare \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\blacksquare \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$4. \text{ Relation de Chasles : } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

5. **Positivité de l'intégrale :** Soit  $a < b$  et  $f(x) \geq 0$  sur  $[a; b]$  alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

6. Si  $f(x) \geq g(x)$  sur  $[a; b]$  alors  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .

*Preuves :*

Soit  $F$  et  $G$  une primitive de  $f$  et de  $g$  respectivement.

$$1. \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$2. \int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x) dx$$

## 3. Linéarité de l'intégrale :

- $F+G$  est une primitive de  $f+g$  d'où le résultat

- On sait que  $kF$  est une primitive de  $kf$  donc

$$\int_a^b kf(x) dx = (kF)(b) - (kF)(a) = k(F(b) - F(a)) = k \int_a^b f(x) dx$$

4.  $(F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = (F(c) - F(a))$  d'où le résultat5. Découle de la définition de l'intégrale dans le cas où  $f$  est positive6. Si  $f(x) \geq g(x)$  sur  $[a; b]$  alors  $f(x) - g(x) \geq 0$  donc  $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$ 

$$\text{donc } \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0 \text{ d'après la linéarité de l'intégrale}$$

$$\text{donc } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

#

## Exercice 5 :

1. Déterminer le signe de l'intégrale  $M = \int_0^1 e^{-x^2} dx$  .2. Soit  $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$  et  $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$  .

(a) Calculer I

(b) Calculer I + J puis en déduire J

## Exercice 6 :

1. Démontrer que  $\forall x \in [0; 1], e^{x^2} \leq e^x$  .2. En déduire que  $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e-1$

## IV. Intégration par parties

**Propriété :** Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et dont les dérivées  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $I$ . Soit  $a$  et  $b$  deux réels. On a :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

*Preuve :*

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$  donc la fonction  $uv$  est aussi dérivable sur  $I$  et

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ donc } \forall x \in I, u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x) .$$

Or, les fonctions  $u$  et  $v$  sont continues sur  $I$  car elles sont dérivables sur  $I$ . De plus,  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $I$  donc les fonctions  $uv'$  et  $v'u$  le sont également donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)v'(x) dx &= \int_a^b ((uv)'(x) - u'(x)v(x)) dx \\ \int_a^b u(x)v'(x) dx &= \int_a^b (uv)'(x) dx - \int_a^b u'(x)v(x) dx \quad \text{d'après la propriété de linéarité de l'intégrale} \end{aligned}$$

Or, une primitive de la fonction  $(uv)'$  est la fonction  $(uv)$  donc :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx \quad \#$$

Exercice 7 :

$$\text{Calculer } I = \int_0^{\pi} x \sin(x) dx \text{ , } J = \int_1^e x \ln(x) dx \text{ et } K = \int_0^{\ln(2)} (x-1)e^x dx .$$

## V. Applications du calcul intégral

### 1. Calcul d'aires

La définition de l'intégrale pour une fonction positive permet de calculer l'aire sous la courbe puis que

celle-ci est alors égale, en u.a, à  $\int_a^b f(x) dx$ .

Plus généralement, l'intégrale d'une fonction de signe quelconque permet de calculer l'aire de certaines surfaces planes délimitées par une courbe ou par deux courbes.

#### Propriété :

1. Si  $f$  est **continue et négative** sur  $[a;b]$  alors l'aire, exprimée en u.a, de la surface plane délimitée par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x=a$  et  $x=b$  est égale à :

$$-\int_a^b f(x) dx$$

2. Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions **continues positives** sur  $[a;b]$  telles que  $f(x) \leq g(x)$  alors, l'aire en u.a, de la surface comprise entre les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  et les droites d'équation  $x=a$  et  $x=b$  est égale à :

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

Exercice 8 :

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $[0;1]$  par  $f(x)=2x$  et  $g(x)=x^2$ .

1. Construire  $C_f$  et  $C_g$  dans un même repère orthogonal
2. Démontrer que  $\forall 0 \leq x \leq 1, f(x) \geq g(x)$
3. Calculer l'aire  $A_1$ , en u.a, de la surface comprise entre  $C_g$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x=0$  et  $x=1$ .
4. Calculer l'aire  $A_2$ , en u.a, de la surface comprise entre les courbes  $C_f$  et  $C_g$  et les droites d'équation  $x=0$  et  $x=1$ .

## 2. Valeur moyenne d'une intégrale

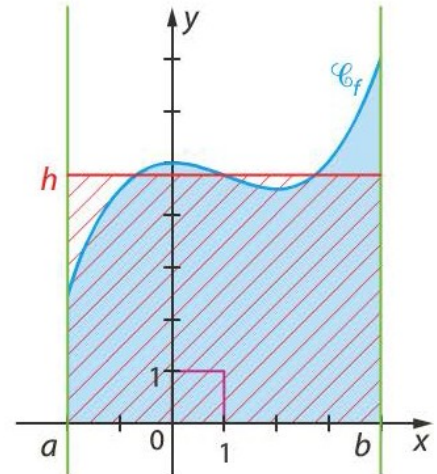
**Définition :** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a;b]$ .

On appelle **valeur moyenne de  $f$**  sur  $[a;b]$  le réel :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Remarque : on écrit aussi  $m \times (b-a) = \int_a^b f(x) dx$  .

Dans le cas où  $f$  est strictement positive sur  $[a;b]$  , la valeur moyenne de  $f$  est la hauteur  $h$  du rectangle de largeur  $(b-a)$  qui a la même aire que l'aire sous la courbe.



Remarque : la vitesse moyenne d'un mobile lors d'un mouvement uniformément accéléré entre deux

instants  $t_1$  et  $t_2$  est égale à la valeur moyenne de sa vitesse  $\frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$  .

Exercice 9 :

Calculer la valeur moyenne de la fonction carré sur  $[0;3]$ .