Dans les exercices 52 à 62, les fonctions $f(x)$ sont admises continues sur l'intervalle $[a;b]$ avec $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

On se focalise uniquement sur le calcul de l'intégrale et le résultat.

Exercice n° 52 p 342

$$I = \int_1^3 (x^3 + 4x^2 - 5x + 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + 4\times\frac{x^3}{3} - 5\times\frac{x^2}{2} + x\right]_1^3$$

$$I = \left(\frac{3^4}{4} + 4\times\frac{3^3}{3} - 5\times\frac{3^2}{2} + 3\right) - \left(\frac{1^4}{4} + 4\times\frac{1^3}{3} - 5\times\frac{1^2}{2} + 1\right)$$

$$I = \frac{147}{4} - \frac{1}{12} = \frac{441}{12} - \frac{1}{12} = \frac{440}{12} = \frac{110}{3}$$

Exercice n° 53 p 342

$$I = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx = \left[x - \ln(x)\right]_1^e = (e - \ln(e)) - (1 - \ln(1))$$

$$I = e - 1 - 1 - 0 = e - 2$$

Exercice n° 54 p 342

$$I = \int_0^{\ln 2} (2x + e^x)\,dx = \left[x^2 + e^x\right]_0^{\ln 2} = \left((\ln 2)^2 + e^{\ln 2}\right) - \left(0^2 + e^0\right)$$

$$I = (\ln 2)^2 + 2 - 1 = (\ln 2)^2 + 1$$

Exercice n° 55 p 342

$$I = \int_1^2 \frac{x^2+3}{x}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{x} + \frac{3}{x}\right)dx = \int_1^2 \left(x + \frac{3}{x}\right)dx$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} + 3\ln x\right]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2} + 3\ln(2)\right) - \left(\frac{1^2}{2} + 3\ln(1)\right)$$

$$I = 2 + 3\ln(2) - \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2} + 3\ln(2)$$

Exercice n° 56 p 342

$$I = \int_1^{\ln 2} e^{4t}\,dt = \left[\frac{e^{4t}}{4}\right]_1^{\ln 2} = \frac{e^{4\times\ln 2}}{4} - \frac{e^{4\times 1}}{4} = \frac{e^{\ln 2^4}}{4} - \frac{e^4}{4}$$

$$I = \frac{2^4}{4} - \frac{e^4}{4} = 4 - \frac{e^4}{4}$$

Exercice n° 57 p 342

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1}\,dt = \int_0^1 - \frac{u'(t)}{u(t)}\,dt \quad \text{avec} \begin{cases} u(t) = e^{-t}+1 > 0 \\ u'(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

$$I = \left[-\ln\left(e^{-t}+1\right)\right]_0^1 = \left(-\ln\left(e^{-1}+1\right) + \ln\left(e^{0}+1\right)\right)$$

$$I = -\ln\left(\frac{1}{e}+1\right) + \ln(2) = -\ln\left(\frac{1+e}{e}\right) + \ln(2)$$

$$I = -\ln(1+e) - \left(-\ln(e)\right) + \ln(2) = -\ln(1+e) + 1 + \ln(2)$$

$$I = 1 + \ln(2) - \ln(e+1)$$

Exercice n° 58 p 342

$$I = \int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_2^4 \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_2^4 \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\,dx$$

avec $u(x) = x^2-1$ $\quad u'(x) = 2x$ $\quad$ et $u(x) > 0$ sur $[2;4]$

$$I = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^4 = \sqrt{4^2-1} - \sqrt{2^2-1} = \sqrt{15} - \sqrt{3}$$

Exercice n° 59 p 342

$$I = \int_{-1}^1 (2u+1)\left(u^2+u\right)^2 du = \int_{-1}^1 v'(u) \times \left(v(u)\right)^2 du$$

avec $v(u) = u^2+u$ $\quad v'(u) = 2u+1$

$$I = \left[\frac{\left(u^2+u\right)^3}{3}\right]_{-1}^1 = \left(\frac{\left(1^2+1\right)^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2+(-1)}{3}\right) = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

Exercice n° 60 p 343

$$K = \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} 2x\,\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}\,dx = \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} 2x\,\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\,dx$$

avec $u(x) = e^x+1 > 0$ et $u'(x) = e^x$

$$K = \left[2\sqrt{e^x+1}\right]_{\ln(1)}^{\ln(2)} = 2\left(\sqrt{e^{\ln 2}+1} - \sqrt{e^{\ln 1}+1}\right)$$

$$K = 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

Exercice 61 p 343

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx = \int_0^{\pi} u(x) \times u'(x)\,dx \quad \text{avec} \begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ u'(x) = \cos(x) \end{cases}$$

$$I = \left[\frac{\sin^2(x)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\sin^2(\pi)}{2} - \frac{\sin^2(0)}{2} = 0 - 0 = 0$$

Exercice n° 62 p 343

$$J = \int_0^{\pi} \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) dt = \left[-\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$J = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \left(-\cos\left(0 - \frac{\pi}{3}\right)\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$J = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Exercice n° 63 p 343

1) Soit $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - 5x + 4)\,dx$

Signe de $f(x) = x^2 - 5x + 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2 > 0$ donc $f(x)$ admet 2 racines

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$

Signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

x		1		4	
$f(x)$	+		−		+

Conclusion : $\forall x \in [-1; 1]$, $f(x) \geq 0$ donc $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq 0$ donc **VRAI**

2) $$\int_{\ln 2}^{\ln 5} e^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{\ln 2}^{\ln 5} = \frac{1}{2}\left(e^{2\times\ln 5} - e^{2\times\ln 2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\ln 25} - e^{\ln 4}\right) = \frac{1}{2}(25 - 4) = \frac{21}{2}$$

donc **FAUX**

Exercice n°64 p343

$f :]-1 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x+1}$

1) Soit $x > -1$, on a :

$$2x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{2x(x+1) - (x+1) + 1}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x - x - \cancel{1} + \cancel{1}}{x+1}$$

$$= \frac{2x^2 + x}{x+1} = f(x)$$

2) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

f est continue sur $[0;1]$ comme quotient de fonctions continues sur $[0;1]$ donc admet des primitives sur $[0;1]$.

De plus, $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ donc

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(2x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx \qquad \text{avec } x+1 > 0 \text{ sur } [0;1]$$

$$= \Big[x^2 - x + \ln(x+1)\Big]_0^1$$

$$= \left(\cancel{1^2} - \cancel{1} + \ln(2)\right) - \left(0^2 - 0 + \ln(1)\right)$$

$$= \ln(2)$$

Exercice n°65 p343

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = x e^x$

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto F(x) = (x-1)e^x$

1) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x = \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} = xe^x = f(x)$

donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

2) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 0 - \left(-e^0\right) = 1$

Exercice n°66 p 343

$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = x^2 \ln(x)$

$g :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto g(x) = x \ln(x)$

1) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

$\forall x > 0, \quad f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x$

$\forall x > 0, \quad f'(x) = 2\,g(x) + x$

donc $\quad g(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x) - x\right)$

2) On déduit que $G(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{x^2}{2}\right)$ est une primitive de g sur $]0;+\infty[$

3) $$\int_1^e g(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\left(f(e) - \frac{e^2}{2}\right) - \left(f(1) - \frac{1^2}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(e^2 - \frac{e^2}{2}\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)$$

Exercice n° 71 p 343

1) $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$I = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$ avec $u(x) = 1+x^2 > 0$ sur $[0;1]$ continue sur $[0;1]$

d'où $I = \left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

2) $I + J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$

$I + J = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$

3) $I + J = \frac{1}{2} \iff J = \frac{1}{2} - I = \frac{1}{2} - \ln(2)$

Exercice n° 72 p 343

1) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$I - J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$

avec $u(x) = \cos(x)+\sin(x)$ continue et dérivable sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, ne s'annulant pas sur $[0;\frac{\pi}{2}]$. et $u'(x) = -\sin(x) + \cos(x) = \cos(x) - \sin(x)$.

De plus, $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $u(x) = \cos(x)+\sin(x) > 0$ d'où

$I - J = \left[\ln\left(\cos(x)+\sin(x)\right)\right]_0^{\pi/2} = \ln(1) - \ln(1) = 0$

2) $\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{2} \\ I - J = 0 \end{cases}$ donc $2I = \frac{\pi}{2}$ donc $I = J = \frac{\pi}{4}$

Exercice n° 73 p 343

$$\int_{-3}^{5} |x|\,dx = \int_{-3}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{5} x\,dx \quad \text{car } |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{5} = -\frac{0^2}{2} - \frac{-(-3)^2}{2} + \frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{25}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

Exercice n° 76 p 343

1) Soit $x \in [0;1]$. On a :

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq x$$

$$\Leftrightarrow -x \leq -x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < e^{-x} \leq e^{-x^2} \leq e^0 = 1$$ car $x \mapsto e^x$ (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x e^{-x} \leq x e^{-x^2} \leq x$$

donc $0 \leq x e^{-x} \leq x e^{-x^2}$

2) $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq x e^{-x} \leq x e^{-x^2}$

donc $\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 x e^{-x}\,dx \leq \int_0^1 x e^{-x^2}\,dx$ par comparaison de l'intégrale

donc $0 \leq \int_0^1 x e^{-x}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{-2} \times (-2x) \times e^{-x^2}\,dx$

donc $0 \leq \int_0^1 x e^{-x}\,dx \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 u'(x) e^{u(x)}\,dx$ avec $u(x) = -x^2$ continue sur $[0;1]$

donc $0 \leq \int_0^1 x e^{-x}\,dx \leq -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2}\right]_0^1$

donc $0 \leq \int_0^1 x e^{-x}\,dx \leq -\frac{1}{2} \left(e^{-1} - 1\right)$

or $-\frac{1}{2}\left(e^{-1} - 1\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

donc $0 \leq \int_0^1 x e^{-x}\,dx \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

Exercice 81 p 344

1) $$I = \int_{-2}^{3} (x+1)\, e^{x}\, dx$$

On pose $u(x) = x+1$ dérivable sur $[-2;3]$ avec $u'(x) = 1$

et $v'(x) = e^{x}$ continue sur $[-2;3]$ avec $v(x) = e^{x}$

Par une IPP, on obtient :

$$I = \left[(x+1)\, e^{x} \right]_{-2}^{3} - \int_{-2}^{3} 1 \times e^{x}\, dx = \left[(x+1)\, e^{x} \right]_{-2}^{3} - \left[e^{x} \right]_{-2}^{3}$$

$$I = \left[x\, e^{x} \right]_{-2}^{3} = 3e^{3} - (-2)\, e^{-2} = 3e^{3} + 2e^{-2}$$

2) $$J = \int_{0}^{1} x\, e^{2x}\, dx$$

On pose $u(x) = x$ dérivable sur $[0;1]$ avec $u'(x) = 1$

et $v'(x) = e^{2x}$ continue sur $[0;1]$ avec $v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

Par une IPP, on obtient :

$$J = \left[\frac{1}{2} x\, e^{2x} \right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} 1 \times \frac{1}{2} e^{2x}\, dx$$

$$J = \left[\frac{1}{2} x\, e^{2x} \right]_{0}^{1} - \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_{0}^{1} = \frac{1}{2} \left[x\, e^{2x} \right]_{0}^{1} - \frac{1}{4} \left[e^{2x} \right]_{0}^{1}$$

$$J = \frac{1}{2} \left(e^{2} - 0\, e^{0} \right) - \frac{1}{4} \left(e^{2} - e^{0} \right)$$

$$J = \frac{1}{2} e^{2} - \frac{1}{4} e^{2} + \frac{1}{4}$$

$$J = \frac{1}{4} e^{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(e^{2} + 1 \right)$$

Exercice 82 p 344

1) $I = \int_1^e \ln(x)\,dx = \int_1^e 1 \times \ln(x)\,dx$

On pose $u(x) = \ln(x)$ dérivable sur $[1;e]$ avec $u'(x) = \frac{1}{x}$

et $v'(x) = 1$ continue sur $[1;e]$ avec $v(x) = x$.

Par une IPP, on obtient :

$I = \left[x \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x}\,dx = \left[x\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e 1\,dx$

$I = \left(e\ln(e) - 1\ln(1)\right) - (e-1) = e - e + 1 = 1$

2) $J = \int_1^e x^2 \ln(x)\,dx$

On pose $u(x) = \ln(x)$ dérivable sur $[1;e]$ avec $u'(x) = \frac{1}{x}$

et $v'(x) = x^2$ continue sur $[1;e]$ avec $v(x) = \frac{x^3}{3}$

Par une IPP, on obtient :

$J = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}\,dx$

$J = \frac{1}{3}\left[x^3 \ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx$

$J = \frac{1}{3}\left[x^3\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{1}{3}\left[x^3\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{9}\left[x^3\right]_1^e$

$J = \frac{1}{3}\left(e^3\ln(e) - 1^3\ln(1)\right) - \frac{1}{9}\left(e^3 - 1^3\right)$

$J = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$

Exercice n° 83 p 344

1) $I = \int_0^{\pi/2} x \cos(x)\, dx$

On pose $u(x) = x$ dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ avec $u'(x) = 1$

et $v'(x) = \cos(x)$ continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ avec $v(x) = \sin(x)$

Par une IPP, on obtient :

$I = \left[x \sin(x) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \times \sin(x)\, dx$

$I = \left[x \sin(x) \right]_0^{\pi/2} - \left[- \cos(x) \right]_0^{\pi/2} = \left[x \sin(x) \right]_0^{\pi/2} + \left[\cos(x) \right]_0^{\pi/2}$

$I = \left(\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 \sin(0) \right) + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \right)$

$I = \frac{\pi}{2} - 1$

2) $J = \int_0^{\pi} (x+1) \sin(x)\, dx$

On pose $u(x) = x+1$ dérivable sur $[0; \pi]$ avec $u'(x) = 1$

et $v'(x) = \sin(x)$ continue sur $[0; \pi]$ avec $v(x) = -\cos(x)$

Par une IPP, on obtient :

$J = \left[-(x+1) \cos(x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times (-\cos x)\, dx$

$J = \left[-(x+1) \cos(x) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx = \left[-(x+1) \cos(x) \right]_0^{\pi} + \left[\sin(x) \right]_0^{\pi}$

$J = \left(-(\pi+1) \cos(\pi) + (0+1) \cos(0) \right) + \left(\sin(\pi) - \sin(0) \right)$

$J = -(\pi+1) \times (-1) + 1 = \pi + 1 + 1 = \pi + 2$

Exercice 84 p 344

1) $I = \int_0^{\pi} t \sin(2t)\, dt$

On pose $u(t) = t$ dérivable sur $[0;\pi]$ avec $u'(t) = 1$

et $v'(t) = \sin(2t)$ continue sur $[0;\pi]$ avec $v(t) = -\frac{\cos(2t)}{2}$

Par une IPP, on obtient :

$I = \left[-\frac{1}{2} t \cos(2t)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times \frac{-\cos(2t)}{2}\, dt$

$I = \left[-\frac{1}{2} t \cos(2t)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(2t)}{2}\, dt$

$I = \left[-\frac{1}{2} t \cos(2t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = \left[-\frac{1}{2} t \cos(2t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4}\left[\sin(2t)\right]_0^{\pi}$

$I = \left(-\frac{1}{2} \times \pi \times \cos(2\pi) + \frac{1}{2} \times 0 \times \cos(2\times 0)\right) + \frac{1}{4}\left(\sin(2\pi) - \sin(2\times 0)\right)$

$I = -\frac{\pi}{2}$

2) $J = \int_{-1}^{2} (3t+1)\, e^{-t}\, dt$

On pose $u(t) = 3t+1$ dérivable sur $[-1;2]$ avec $u'(t) = 3$

et $v'(t) = e^{-t}$ continue sur $[-1;2]$ avec $v(t) = -e^{-t}$

Par une IPP, on obtient :

$J = \left[-(3t+1)e^{-t}\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} 3 \times (-e^{-t})\, dt = \left[-(3t+1)e^{-t}\right]_{-1}^{2} + 3\int_{-1}^{2} e^{-t}\, dt$

$J = \left[-(3t+1)e^{-t}\right]_{-1}^{2} - 3\left[e^{-t}\right]_{-1}^{2}$

$J = \left(-7e^{-2} + (-2)e^{1}\right) - 3\left(e^{-2} - e^{1}\right)$

$J = -7e^{-2} - 2e - 3e^{-2} + 3e = -10e^{-2} + e$

Exercice 88 p 344

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{1+e^{x}} = \frac{1}{e^{x}\left(e^{-x}+1\right)} = \frac{1}{e^{x}} \times \frac{1}{e^{-x}+1} = e^{-x} \times \frac{1}{e^{-x}+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

autre méthode

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 \times \left(e^{-x}+1\right) = e^{-x}+1 \quad \text{et} \quad e^{-x}\left(1+e^{x}\right) = e^{-x}+1$$

donc $1 \times \left(e^{-x}+1\right) = e^{-x} \times \left(1+e^{x}\right)$ donc $\dfrac{1}{1+e^{x}} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

b) $$I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx = \int_0^1 -\frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$$

avec $u(x) = e^{-x}+1$ dérivable sur $[0;1]$ avec $u'(x) = -e^{-x}$

et $u(x) > 0$ sur $[0;1]$ d'où :

$$I = -\int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = -\left[\ln\left(u(x)\right)\right]_0^1 = -\left[\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]_0^1$$

$$I = -\left(\ln\left(e^{-1}+1\right) - \ln(2)\right) = \ln(2) - \ln\left(e^{-1}+1\right)$$

2) $$J = \int_0^1 \frac{xe^{x}}{(1+e^{x})^2}\,dx = \int_0^1 x e^{x} \times \left(1+e^{x}\right)^{-2}\,dx = \int_0^1 x\, w'(x)\left(w(x)\right)^{-2}\,dx$$

Posons $u(x) = x$ dérivable sur $[0;1]$ avec $u'(x) = 1$

et $v'(x) = \dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}$ continue sur $[0;1]$ avec $v(x) = -\dfrac{1}{1+e^{x}}$

Par une IPP, on obtient :

$$J = \left[x \times \left(-\frac{1}{1+e^{x}}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{-1}{1+e^{x}}\,dx$$

$$J = \left[x \times \left(\frac{-1}{1+e^{x}}\right)\right]_0^1 + I$$

$$J = \left(\frac{-1}{1+e} - 0\right) + \ln(2) - \ln\left(e^{-1}+1\right) = \frac{-1}{1+e} + \ln(2) - \ln\left(e^{-1}+1\right)$$

Exercice 89 p 344

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$

1) $I_0 = \int_0^1 e^x \, dx = \left[e^x \right]_0^1 = e - 1$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$

On pose $u(x) = e^x$ dérivable sur $[0;1]$ avec $u'(x) = e^x$

et $v'(x) = x^n$ continue sur $[0;1]$ avec $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Par une IPP, on obtient :

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} e^x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} e^x \, dx$$

$$I_n = \left(\frac{1}{n+1} e - \frac{0}{n+1} e^0 \right) - \frac{1}{n+1} I_{n+1}$$

$$I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}$$ d'où $(n+1) I_n = e - I_{n+1}$

donc $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$

3) On déduit :

$I_1 = e - I_0 = e - (e-1) = 1$

$I_2 = e - 2 I_1 = e - 2$

$I_3 = e - 3 I_2 = e - 3(e-2) = e - 3e + 6 = -2e + 6$

Exercice 90 p 344.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^2 f_n(x)\,dx$ où $f_n(x) = e^{nx^2}$ pour $1 \leq x \leq 2$

1) a) I_n représente la surface du domaine compris entre la courbe C_n, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

D'après la représentation graphique, il semble que (I_n) soit croissante

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^2 f_{n+1}(x)\,dx - \int_1^2 f_n(x)\,dx = \int_1^2 e^{(n+1)x^2}\,dx - \int_1^2 e^{nx^2}\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(e^{nx^2} e^{x^2} - e^{nx^2}\right) dx$$

$$= \int_1^2 e^{nx^2}\left(e^{x^2} - 1\right) dx$$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [1;2]$, $e^{nx^2} > 0$ et $x^2 \geqslant 1$ donc $e^{x^2} - 1 > 0$

On déduit par positivité de l'intégrale que $\int_1^2 e^{nx^2}(e^{x^2}-1)\,dx > 0$

donc $I_{n+1} - I_n > 0$ donc (I_n) est croissante (strictement).

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$I_n = \int_1^2 e^{nx^2}\,dx \geqslant \int_1^2 e^n\,dx$ car $x \geqslant 1$ donc $x^2 \geqslant 1$ car $x \mapsto x^2$ croissante sur $[0;+\infty[$

donc $I_n \geqslant e^n \int_1^2 dx = e^n(2-1) = e^n$ donc $e^{x^2} \geqslant e^1 > 0$

donc $I_n \geqslant e^n$

b) $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$ par comparaison de limites

Exercice 91 p 344

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx$$

1) Soit $x \in [n; n+1]$ donc $n \leq x \leq n+1$

donc $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ (strictement) decroissante sur $]0;+\infty[$

donc $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ d'après le 1)

donc $\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\, dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\, dx$ par comparaison d'intégrales

donc $\frac{1}{n+1}(n+1-n) \leq I_n \leq \frac{1}{n}(n+1-n)$

donc $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln(x)\right]_n^{n+1}$ avec $\frac{1}{x} > 0$ sur $[n; n+1]$

$I_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$

par composition de limites. donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 94 p 344

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

1) $$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

avec $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ continue sur $[0;1]$ donc admet des primitives sur $[0;1]$

et $\frac{1}{1+x} > 0$ sur $[0;1]$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx$$

$$u_{n+1} + u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

b) On déduit que pour $n=0$, $u_1 + u_0 = \frac{1}{0+1} = 1$

donc $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln(2)$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \times x\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

car $0 \leq x \leq 1$

donc $u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) est bien décroissante

Exercice 95 p 344

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq x^n \leq 1$ car $x \mapsto x^n$ croissante sur $[0;1]$

donc $1 \leq 1+x^n \leq 2$

donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq 1$ car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décroissante sur $]0;+\infty[$

donc $\dfrac{1}{1+x^n} \leq 1$

b) On déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx$ par comparaison d'intégrales

donc $I_n \leq 1$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq x^n \leq 1$

donc $1 \leq 1+x^n \leq 2$

donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq 1$ car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décroissante sur $]0;+\infty[$

donc $\dfrac{x^n}{2} \leq \dfrac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$ car $x^n \geq 0$

donc $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$

donc $0 \leq J_n \leq \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{0}{n+1}$

donc $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$ $\left(\text{avec } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+1}\right)$

d'après le théorème des gendarmes.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n + J_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 dx = 1$$

b) On déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 1 - J_n$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$ d'après le 2) b) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 1$

par addition de limites.

Exercice 99 p 345

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 0{,}5\,x^2 - 3x + 4$

1) Etude du signe de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ sur $\mathbb{R}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times 4 = 9 - 8 = 1 > 0$ donc

f admet deux racines réelles sur $\mathbb{R}$.

$x_1 = \dfrac{3-1}{2\times\frac{1}{2}} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{2\times\frac{1}{2}} = 4$

or le coefficient des x^2 est $a = \frac{1}{2} > 0$ d'où le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

2) $\forall x \in [1;2]$, $f(x) \geq 0$ donc l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ est égale à $\int_1^2 f(x)\,dx$.

or $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right)dx = \left[\frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3} - 3\times\frac{x^2}{2} + 4x\right]_1^2$

$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{6}\left(2^3 - 1^3\right) - \frac{3}{2}\left(2^2 - 1^2\right) + 4\,(2-1)$

$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{6}\times 7 - \frac{3}{2}\times 3 + 4\times 1$

$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{7}{6} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{7}{6} - \frac{27}{6} + \frac{24}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3) $\forall x \in [2;4]$, $f(x) \leq 0$ donc l'aire de la surface délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 2$ vaut

$\displaystyle\int_2^4 (-f(x))\,dx = -\int_2^4 f(x)\,dx = -\left[\frac{1}{6}\left(4^3 - 2^3\right) - \frac{3}{2}\left(4^2 - 2^2\right) + 4\,(4-2)\right]$

$= -\left[\frac{1}{6}\times 56 - \frac{3}{2}\times 12 + 8\right] = -\left(\frac{28}{3} - 18 + 8\right) = -\left(\frac{28}{3} - \frac{30}{3}\right) = -\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

Exercice n°1 p 345

Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

1) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$.

$\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln(x)}{x^4} = \dfrac{x - 2x\ln(x)}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$

or $\forall x > 0$, $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln(x)$.

$1 - 2\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = \dfrac{1}{2} \iff x = e^{1/2}$ avec $x > 0$

$1 - 2\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < \dfrac{1}{2} \iff x < e^{1/2}$ avec $x > 0$

$1 - 2\ln(x) < 0 \iff \ln(x) > \dfrac{1}{2} \iff x > e^{1/2}$ avec $x > 0$

On déduit le tableau de signes de $f'(x)$ puis de variations de f

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$1-2\ln(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$ par quotient de limites avec $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+ \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissances comparées

$f(e^{1/2}) = \dfrac{\ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{e} = \dfrac{1}{2e}$

2) $\forall x > 0, \quad f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

or $\forall x > 0$, $x^2 > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $\ln(x)$ donc $f(x) \leq 0$ pour $x \in]0;1]$ et $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$.

3) Voir calculatrice ou geogebra pour la courbe

4) a) $\forall x \in [1;e]$, $f(x) \geq 0$ donc l'aire de $\mathcal{S}$ vaut $\int_1^e f(x)\,dx$.

$$\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx.$$

On pose $u(x) = \ln(x)$ dérivable sur $[1;e]$ avec $u'(x) = \dfrac{1}{x}$

et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ continue sur $[1;e]$ avec $v(x) = \dfrac{-1}{x}$.

Par une IPP, on obtient :

$$\int_1^e f(x)\,dx = \left[\frac{-\ln(x)}{x}\right]_1^e - \int_1^e \frac{-1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$\int_1^e f(x)\,dx = \left(-\frac{\ln(e)}{e} + \frac{\ln(1)}{1}\right) - \left(\frac{1}{e} - 1\right)$$

$$\int_1^e f(x)\,dx = -\frac{1}{e} + 0 - \frac{1}{e} + 1 \quad u.a = 1 - \frac{2}{e} \quad u.a$$

b) $1\ u.a = 2 \times 6\ cm^2 = 12\ cm^2$

d'où $\mathcal{S} = \left(\dfrac{e-2}{e}\right) \times 12 = \dfrac{12(e-2)}{e}\ cm^2$

Exercice 102 p 345

1) voir calculatrice ou géogebra pour $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

2) Sur $[0;1]$, $f(x) \leq g(x)$ donc $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $[0;1]$

3) On déduit que $\mathcal{A} = \int_0^1 (g(x) - f(x))\, dx$ u.a

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x^3)\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ u.a}$$

Exercice 103 p 345

1) Soit $x > 0$, on a $f(x) - g(x) = x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}$

Signe de $x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ et $a = 1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$

De plus, $x > 0$.
On déduit que $f(x) - g(x)$ est du signe de $(x-1)$ sur $]0; +\infty[$ d'où

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Remarque : on retrouve aisement ce resultat par lecture du graphique donné dans l'énoncé

2) On déduit que $\mathcal{A} = \int_1^e (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^e \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{x^3}{3} - \ln(x)\right]_1^e = \left(\frac{e^3}{3} - \ln(e)\right) - \left(\frac{1}{3} - \ln(1)\right)$$

$$\mathcal{A} = \frac{e^3}{3} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{e^3 - 1}{3} - 1 = \frac{e^3 - 1 - 3}{3} = \frac{e^3 - 4}{3} \text{ u.a}$$

Exercice no 6 p 345

$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \ln(x)$

1) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$

d'où $f'(1) = 1$

et $f(1) = \ln(1) = 0$

d'où $T : y = x - 1$

2) Soit $g(x) = f(x) - (x-1) = \ln(x) - x + 1$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme différence de fonctions définies et dérivables sur $]0;+\infty[$.

$\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$\forall x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $(1-x)$ car $x > 0$

On déduit le tableau de signes de $g'(x)$ et de variations de g sur $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

g est croissante sur $]0;1]$ puis décroissante sur $[1;+\infty[$ donc g admet un maximum en $x = 1$ qui vaut $g(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$

donc pour tout $x > 0$, $g(x) \leq 0$ donc $f(x) \leq (x-1)$ donc $\mathcal{C}$ est située en dessous de T sur $]0;+\infty[$.

3) Sur $[1;e]$, on a $\mathcal{C}$ en dessous de T donc l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$, T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ vaut :

$$\mathcal{A} = \int_1^e \Big((x-1) - \ln x \Big) \, dx = \int_1^e x \, dx - \int_1^e dx - \int_1^e \ln(x) \, dx$$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2} x^2\right]_1^e - (e-1) - \int_1^e \ln(x) \, dx = \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - (e-1) - \int_1^e \ln x \, dx$$

Calcul de $\int_1^e \ln x \, dx$

On pose $u(x) = \ln(x)$ dérivable sur $[1;e]$ avec $u'(x) = \frac{1}{x}$

et $v'(x) = 1$ continue sur $[1;e]$ avec $v(x) = x$

Par une IPP, on obtient :

$$\int_1^e \ln(x) \, dx = \left[x \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{x} \times x\right) dx$$

$$= \left[x \ln(x)\right]_1^e - (e-1)$$

$$= e \ln(e) - 1 \ln(1) - e + 1$$

$$= e - e + 1 = 1$$

d'où $\mathcal{A} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - e + \cancel{1} - \cancel{1} = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2}$ u.a

Exercice 109 p 346 erreur sur l'énoncé du livre : Il faut lire $[1;+\infty[$ et non pas $]1;+\infty[$

$g : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto g(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt$

1) a) $\forall x \geq 1$, $g'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ car g est la primitive de $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ s'annulant en $t = 1$.

or $\forall x \geq 1$, $x^2 > 0$ et $\ln(x) \geq 0$ donc $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[1;+\infty[$.

b) $g(3) = \int_1^3 \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt$.

$f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ est continue et (strictement) positive sur $[1;3]$ donc $g(3)$ est l'aire en u.a du domaine compris entre C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$

2) a) Posons $u(t) = \ln(t)$ dérivable sur $[1;x]$ avec $x > 1$.

donc $u'(t) = \frac{1}{t}$

Posons $v'(t) = \frac{1}{t^2}$ continue sur $[1;x]$ avec $x > 1$

donc $v(t) = \frac{-1}{t}$

A l'aide d'une IPP, on obtient :

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left(-\frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt$$

$$= \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^x + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x$$

$$= -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1)}{1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{1}$$

$$= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1 = -\frac{\ln(x)+1}{x} + 1$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1 = 1$ comme

somme de limites avec :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Exercice 111 p 346

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = (x+1)e^{-x}$

1) a) • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{-x} = -\infty$ comme produit de limites

avec $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty \end{cases}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} + e^{-x} = 0$

comme somme de limites avec :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} = 0^+$ avec

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées

et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0^+$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0^+$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)\,e^{-x}$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+1) \times \left(-e^{-x}\right)$

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} - e^{-x} = -x e^{-x}$$

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x$ sur $\mathbb{R}$.

c) On déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2) Soit $\lambda > 0$. On pose $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(t)\,dt$

a) f est continue sur $[0;+\infty[$ ~~donc continue sur~~ car dérivable sur $[0;+\infty[$ donc continue sur $[0;\lambda]$ avec $\lambda > 0$.

De plus f est positive sur $[0;+\infty[$ donc positive sur $[0;\lambda]$.

A l'aide d'une IPP, on a :

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(t)\,dt = \int_0^{\lambda} (x+1)\,e^{-x}\,dx$$

On pose $u(x) = x+1$ dérivable sur $[0;\lambda]$ avec $u'(x) = 1$

et $v'(x) = e^{-x}$ continue sur $[0;\lambda]$ avec $v(x) = -e^{-x}$

A l'aide d'une IPP, on obtient :

$A(\lambda) = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} 1 \times (-e^{-x})\,dx$

$A(\lambda) = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^{\lambda} + \int_0^{\lambda} e^{-x}\,dx$

$A(\lambda) = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^{\lambda} + \left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda}$

$A(\lambda) = -(\lambda+1)e^{-\lambda} + 1 \times e^{-0} - e^{-\lambda} + e^{-0}$

$A(\lambda) = -(\lambda+1)e^{-\lambda} + 1 - e^{-\lambda} + 1$

$A(\lambda) = -\lambda e^{-\lambda} - 2e^{-\lambda} + 2$

b) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 2$ comme somme de limites avec

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} -\lambda e^{-\lambda} = \lim\limits_{X \to -\infty} X e^{X} = 0$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = \lim\limits_{X \to -\lambda} e^{X} = 0$

$A(\lambda)$ représente l'aire du domaine compris entre C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 2$ signifie que l'aire ~~sitsé~~ du domaine compris entre C, l'axe des abscisses ~~pour~~ sur $[0;+\infty[$ tend vers 2.

Exercice 112 p 346

Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

1) Etudier les position relative de $\mathcal{C}$ et (d) revient à étudier le signe de $f(x) - x = -\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

or $\forall x > 0$, $x^2 > 0$ donc $f(x) - x$ est du signe de $-\ln(x)$.

$-\ln(x) = 0 \iff x = 1$

$-\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1$

$-\ln(x) < 0 \iff x > 1$

On déduit que $\mathcal{C}$ est au dessus de (d) sur $]0;1[$ et ~~au~~ dessous de (d) sur $]1;+\infty[$.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$.

a) $A(\alpha) = \displaystyle\int_1^\alpha \left(\qquad \right) dx = \int_1^\alpha \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx$

b) (Cette intégrale a été calculée dans l'ex 109 p 346).

On a $A(\alpha) = -\dfrac{\ln(\alpha) + 1}{\alpha} + 1 = -\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha} + 1$

c) (Cette question a aussi été traitée dans l'ex 109 p 346)

$\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = 1$

Exercice n° 114 p 347

1) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ pour $x \in [0;1]$

f est continue sur $[0;1]$ comme fonction polynôme.
Sa valeur moyenne sur $[0;1]$ vaut :

$$\mu = \frac{1}{1-0} \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(-3x^2 + 5x - 1\right) dx$$

$$\mu = \left[-3 \times \frac{x^3}{3} + 5 \times \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \left[-x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x\right]_0^1$$

$$\mu = \left(-1^3 + \frac{5}{2} \times 1^2 - 1\right) - 0 = -1 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

2) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ pour $x \in [1;e]$

f est continue sur $[1;e]$ comme somme de fonctions continues sur $[1;e]$. Sa valeur moyenne vaut

$$\mu = \frac{1}{e-1} \int_1^e f(x)\,dx = \frac{1}{e-1} \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx$$

$$\mu = \frac{1}{e-1} \left[\ln x + x\right]_1^e \quad \text{avec } \frac{1}{x} > 0 \text{ sur } [1;e]$$

$$\mu = \frac{1}{e-1} \left[(\ln e + e) - (\ln 1 + 1)\right]$$

$$\mu = \frac{1}{e-1} \left(1 + e - 1\right) = \frac{e}{e-1}$$

3) $f(x) = e^{2-x}$ pour $x \in [0;4]$.

f est continue sur $[0;4]$ comme composée de fonctions continues sur $[0;4]$
Sa valeur moyenne vaut :

$$\mu = \frac{1}{4-0} \int_0^4 e^{2-x}\,dx = \frac{1}{4} \left[-e^{2-x}\right]_0^4 = \frac{1}{4}\left(-e^{-2} + e^2\right)$$

$$\mu = \frac{1}{4}\left(\frac{e^4 - 1}{e^2}\right) = \frac{e^4 - 1}{4e^2}$$

Exercice 116 p 347

1) $f(x) = \cos(3x)$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

f est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme composée de fonctions continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Sa valeur moyenne vaut

$$\mu = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\pi/2} \cos(3x)\,dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\pi/2}$$

$$\mu = \frac{2}{3\pi} \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) = \frac{2}{3\pi} \times (-1) = \frac{-2}{3\pi}$$

2) $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ comme produit de fonctions continues sur $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$. Sa valeur moyenne vaut :

$$\mu = \frac{1}{\frac{2\pi}{3}} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos(x)\sin^2(x)\,dx = \frac{3}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} u'(x)\,(u(x))^2\,dx$$

avec $u(x) = \sin(x)$

$$\mu = \frac{3}{2\pi} \left[\frac{\sin^3(x)}{3}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{1}{2\pi} \left(\sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^3\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \times \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right)$$

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}$$

3) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ pour $x \in [-1;2]$

f est continue sur $[-1;2]$ comme quotient de fonctions continues sur $[-1;2]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[-1;2]$.

De plus, $\forall x \in [-1;2]$, $x^2+1 > 0$.

Sa valeur moyenne vaut :

$$\mu = \frac{1}{2-(-1)} \int_{-1}^{2} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \frac{1}{3} \times 3 \int_{-1}^{2} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$\mu = \int_{-1}^{2} \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\, dx \quad \text{avec} \begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$$

$$\mu = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_{-1}^{2} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

Exercice n°143 p 352

1) a) Soit $x \in [0;1]$. On a $0 \leq x \leq 1$ donc $0 \leq x^2 \leq 1$

donc $2 \leq x^2+2 \leq 3$

donc $\sqrt{2} \leq \sqrt{x^2+2} \leq \sqrt{3}$

donc $\sqrt{2} \leq x+\sqrt{x^2+2} \leq \sqrt{3}+1$

donc $(x+\sqrt{x^2+2}) > 0$

donc $\ln(x+\sqrt{x^2+2})$ est défini

donc $f(x)$ est définie sur $[0;1]$.

b) f ~~est~~ dérivable sur $[0;1]$ comme composée de fonction dérivables avec $u : x \mapsto x+\sqrt{x^2+2}$ définie, dérivable et strictement positive sur $[0;1]$ et $x \mapsto \ln(x)$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$

$$\forall x \in [0;1], \quad f'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}$$

$$f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{x+\sqrt{x^2+2}}{(x+\sqrt{x^2+2})\times\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

c) $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 f'(x)\,dx$ et $f'(x) > 0$ sur $[0;1]$

d'où $I = f(1) - f(0) = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$

2) a) $J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

$$J+2I = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx = K$$

b) $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} \times 1\,dx$

Posons $u(x) = \sqrt{x^2+2}$ dérivable sur $[0;1]$ avec $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

et $v'(x) = 1$ continue sur $[0;1]$ avec $v(x) = x$

A l'aide d'une IPP, on déduit :

$$K = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times x\,dx$$

$$K = \left(1\sqrt{3} - 0\right) - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$K = \sqrt{3} - J$$

c) On a $\begin{cases} J + 2I = K \\ K = \sqrt{3} - J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J + 2I = \sqrt{3} - J \\ K = \sqrt{3} - J \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2J = \sqrt{3} - 2I \\ K = \sqrt{3} - J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I \\ K = \sqrt{3} - J \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\ K = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\ K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

Exercice 114 p 352 (1 etu)

1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin(x)\,dx$

On pose $u(x) = x^2$ dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ avec $u'(x) = 2x$

et $v'(x) = \sin(x)$ continue sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ avec $v(x) = -\cos(x)$

A l'aide d'une IPP, on obtient :

$$I = \left[-x^2\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x\left(-\cos(x)\right)dx$$

$$I = \left[-x^2\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\,dx$$

Calcul de $\int_0^{\pi/3} x\cos(x)\,dx$

On pose $U(x) = x$ dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ avec $U'(x) = 1$

et $V'(x) = \cos(x)$ continue sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ avec $V(x) = \sin(x)$

A l'aide d'une IPP, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\,dx = \left[x\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\times\sin(x)\,dx$$

$$= \left[x\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left[x\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

d'où $I = \left[-x^2\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\left[x\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\left[\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$I = \left(-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} - 0\right) + 2\left(\frac{\pi}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) + 2\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$I = -\frac{\pi^2}{18} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - 1$$

4) $J = \int_0^{\pi} e^x\cos(2x)\,dx$

On pose $u(x) = \cos(2x)$ dérivable sur $[0;\pi]$ avec $u'(x) = -2\sin(2x)$

et $v'(x) = e^x$ continue sur $[0;\pi]$ avec $v(x) = e^x$

A l'aide d'une IPP, on obtient :

$$J = \left[e^x\cos(2x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-2\sin(2x)\right)\times e^x\,dx$$

$$J = \left[e^x\cos(2x)\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} e^x\sin(2x)\,dx$$

<u>Calcul de</u> $\int_0^{\pi} e^x\sin(2x)\,dx$

On pose $U(x) = \sin(2x)$ dérivable sur $[0;\pi]$ avec $U'(x) = 2\cos(2x)$

et $V'(x) = e^x$ continue sur $[0;\pi]$ avec $V(x) = e^x$

A l'aide d'une IPP, on obtient :

$$\int_0^{\pi} e^x\sin(2x)\,dx = \left[e^x\sin(2x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\cos(2x)e^x\,dx$$

$$= \left[e^x\sin(2x)\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} e^x\cos(2x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin(2x)\, dx = \left(e^{\pi} \sin(2\pi) - e^0 \sin(0) \right) - 2J$$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin(2x)\, dx = -2J$$

On déduit que :

$$J = \left[e^x \cos(2x) \right]_0^{\pi} - 4J$$

$$J = \left(e^{\pi} \cos(2\pi) - e^0 \cos(0) \right) - 4J = e^{\pi} - 1 - 4J$$

donc $5J = e^{\pi} - 1$ donc $J = \dfrac{e^{\pi} - 1}{5}$

Exercice n° 148 p 352

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin(x)\, dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos(x)\, dx$

1) $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\, dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0)\right)$

$I_0 = \left(-0 + 1\right) = 1$

$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = \left[\sin(x)\right]_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

a) $I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx} \sin(x)\, dx$

On pose $u(x) = e^{-nx}$ dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ avec $u'(x) = -n e^{-nx}$

et $v'(x) = \sin(x)$ continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ avec $v(x) = -\cos(x)$

A l'aide d'une IPP, on obtient :

$I_n = \left[-\cos(x)\, e^{-nx}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left(-n e^{-nx}\right) \times \left(-\cos(x)\right) dx$

$I_n = \left[-\cos(x)\, e^{-nx}\right]_0^{\pi/2} - n \int_0^{\pi/2} e^{-nx} \cos(x)\, dx$

$I_n = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-n\frac{\pi}{2}} + \cos(0)\, e^{0}\right) - n\, J_n$

$I_n = \left(-0 + 1\right) - n\, J_n$

$I_n = 1 - n\, J_n$ donc $I_n + n\, J_n = 1$

b) $J_m = \int_0^{\pi/2} e^{-mx} \cos(x)\, dx$

On pose $u(x) = e^{-mx}$ dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ avec $u'(x) = -m e^{-mx}$

et $v'(x) = \cos(x)$ continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ avec $v(x) = \sin(x)$

A l'aide d'une IPP, on obtient :

$$J_m = \left[e^{-mx} \sin(x) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left(-m e^{-mx}\right) \sin(x)\, dx$$

$$J_m = \left[e^{-mx} \sin(x) \right]_0^{\pi/2} + m \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mx} \sin(x)\, dx$$

$$J_m = \left(e^{-m\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^{-0} \sin(0) \right) + m\, I_m$$

$$J_m = e^{-m\frac{\pi}{2}} + m\, I_m \quad \text{donc} \quad -m\, I_m + J_m = e^{-m\frac{\pi}{2}}$$

3) a) $\begin{cases} I_m + m J_m = 1 \\ -m I_m + J_m = e^{-m\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_m = 1 - m J_m \\ -m(1 - m J_m) + J_m = e^{-m\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} I_m = 1 - m J_m \\ -m + m^2 J_m + J_m = e^{-m\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_m = 1 - m J_m \\ (m^2+1) J_m = m + e^{-m\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} I_m = 1 - \dfrac{m}{m^2+1}\left(m + e^{-m\frac{\pi}{2}}\right) = \dfrac{\cancel{m^2} + 1 - \cancel{m^2} - e^{-m\frac{\pi}{2}}}{m^2+1} = \dfrac{1 - e^{-m\frac{\pi}{2}}}{m^2+1} \\ J_m = \dfrac{m + e^{-m\frac{\pi}{2}}}{m^2+1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} I_m = \dfrac{1 - e^{-m\frac{\pi}{2}}}{m^2+1} \\ J_m = \dfrac{m + e^{-m\frac{\pi}{2}}}{m^2+1} \end{cases}$

3) b) • $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1} = 0$ comme quotient de limites avec :

• $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\times\frac{\pi}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition de limites

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\frac{\pi}{2}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-e^{-n\frac{\pi}{2}}\right) = 1$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+1 = +\infty$

• $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X} = 0$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}\right) = 0$

Comme somme de limites égales à 0 avec :

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n\left(n+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\frac{\pi}{2}} = 0$ (voir ci-dessus) et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+1\right) = +\infty$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1} = 0$

Exercice n° 153 p 353

1) Soit $g(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) - 1$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ –

$\forall x > 0$, $g'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} + \frac{x}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$

or $x^2 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x - 1$ sur $]0;+\infty[$.

On déduit le tableau de signes de $g'(x)$ puis de variations de g.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
g	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

g est décroissante sur $]0;1]$ puis croissante sur $[1;+\infty[$ donc g admet un minimum en $x = 1$ qui vaut $g(1) = 0$ donc $\forall x > 0$, $g(x) \geq 0$

donc $\forall x > 0$, $\frac{1}{x} + \ln(x) \geq 1$

2) Soit $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto (x+1)\ln(x)$

a). $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x+1)\ln(x) = -\infty$ comme produit de limites avec

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)\ln(x) = +\infty$ comme produit de limites avec

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

b) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et.

$$\forall x > 0,\ f'(x) = 1 \times \ln(x) + (x+1) \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 + \frac{1}{x}$$

or d'après le 1) $\forall x > 0 \quad \frac{1}{x} + \ln(x) \geq 1$

donc $\forall x > 0 \quad f'(x) \geq 2 > 0$

donc f est (strictement) croissante sur $]0;+\infty[$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = (x+1)\ln(x) \geq 0$ sur $[n; n+1]$ donc u_n est l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = n$ et $x = n+1$ exprimée en u.a.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$n \leq x \leq n+1$$

donc $f(n) \leq f(x) \leq f(n+1)$ car la fonction f est croissante $]0;+\infty[$

donc $\displaystyle\int_n^{n+1} f(n)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx$ par la propriété de comparaison de l'intégrale

donc $f(n)(n+1-n) \leq u_n \leq f(n+1)(n+1-n)$

donc $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f(n+1) \leq u_{n+1} \leq f(n+2)$$
$$-f(n+1) \leq -u_n \leq -f(n)$$

donc $0 \leq u_{n+1} - u_n$ donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \geqslant f(n)$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ d'après le 2) a) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ par le théorème de comparaison de limites de suites.