Exercice 1

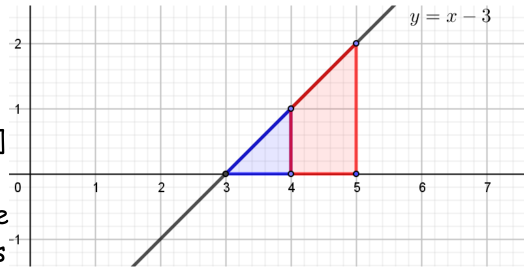
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-3$ et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O;I,J)$

1. Représenter graphiquement les aires, en unité d'aire (u.a), égale aux intégrales

$$I=\int_3^4 f(x)dx \quad \text{et} \quad J=\int_4^5 f(x)dx$$

2. Calculer I et J
3. Vérifier vos résultats à la calculatrice
   indication : en MODE RUN-MATH, utiliser la touche OPTN, choisir CALC puis $\int dx$

Correction



1. Voir ci-contre

2. $f(x)=x-3$ est positive sur les intervalles [3;4] et [4;5]. Les intégrales I et J représentent donc les aires des domaines compris entre la droite $(d): y=x-3$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=3$ et $x=4$ (respectivement $x=4$ et $x=5$.

   Ces deux domaines sont respectivement un triangle rectangle et un trapèze rectangle.

   On déduit que $I=\int_3^4 f(x)dx=\frac{1\times1}{2}=\frac{1}{2}$ et $J=\int_4^5 f(x)dx=\frac{(1+2)\times1}{2}=\frac{3}{2}$.

3. A la calculatrice, on vérifie ces deux résultats en suivant la procédure donné.

Exercice 2

On considère la fonction $\ln$ définie sur $]0\,;+\infty[$ et C sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

1. Exprimé l'aire de la surface délimitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ avec $1<a<b$.
2. On partage l'intervalle [a;b] en n segments de même amplitude h et on note (u_n) la somme des aires des rectangles sous la courbe et (v_n) la somme des rectangles au-dessus de la courbe.
   (a) Exprimer h en fonction de a,b et n .
   (b) Écrire une fonction « rectangles » sous Python, de paramètres a,b et n , qui retourne un encadrement de l'aire située sous la courbe en unités d'aire.
3. Avec l'appel **rectangles(2,3,50)** obtenir une valeur approchée de cette aire à 0,01 près.

Correction

1. La fonction $\ln$ définie sur $]0\,;+\infty[$ est positive sur $[\,1;+\infty[$ donc l'aire de la surface délimitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations
   $x=a$ et $x=b$ avec $1<a<b$ est $I=\int_a^b \ln(t)\,dt$.
2. (a) $h=\dfrac{b-a}{n}$
   (b)

```python
from math import log
def rectangles(a,b,n):
    x=a
    u=0
    v=0
    h=(b-a)/n
    for k in range (1,n+1):
        u=u+h*log(x)
        x=x+h
        v=v+h*log(x)
    return(u,v)
```

3. La fonction **rectangles(2,3,50)** renvoie les valeurs $u\approx 0{,}905$ et $v\approx 0{,}914$ $donc$ $I\approx 0{,}91$.

Exercice 3

Calculer $I=\int_1^3 (3x^2+4x)dx$ et $J=\int_{-1}^0 e^{3x}dx$.

Correction

(a) La fonction $f(x)=3x^2+4x$ est continue sur [1;3] comme fonction polynôme donc admet des primitives sur [1;3]. $F(x)=x^3+2x^2$ est une primitive de f sur [1;3] donc
$I=F(3)-F(1)=45-3=42$.

(b) La fonction $g(x)=e^{3x}$ est continue sur [-1;0] comme composée de fonctions continues sur [-1;0] donc admet des primitives sur [-1;0]. $G(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$ est une primitive de g sur [1;3] donc
$J=G(0)-G(-1)=\frac{1}{3}-\frac{e^{-3}}{3}=\frac{1}{3}(1-e^{-3})$.

Exercice 4

1. Calculer $I=\int_{-1}^{4}(3x^2+4x+1)dx$, $J=\int_{-1}^{0}e^{3x+1}dx$ et $K=\int_{0}^{\pi}3\sin(2x)dx$.

2. (a) Démontrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=x\ln(x)-x$ est une primitive de la fonction Ln sur $]0;+\infty[$.

   (b) En déduire l'intégrale $L=\int_{1}^{e}\ln(x)dx$.

Correction

1. (a) La fonction $f(x)=3x^2+4x+1$ est continue sur [-1;4] comme fonction polynôme donc admet des primitives sur [-1;4]. $F(x)=x^3+2x^2+x$ est une primitive de f sur [-1;4] donc $I=F(4)-F(-1)=100-0=100$.

   (b) La fonction $g(x)=e^{3x+1}$ est continue sur [-1;0] comme composée de fonctions continues sur [-1;0] donc admet des primitives sur [-1;0]. $G(x)=\frac{1}{3}e^{3x+1}$ est une primitive de g sur [-1;4] donc $J=G(0)-G(-1)=\frac{e}{3}-\frac{e^{-2}}{3}=\frac{1}{3}(e-e^{-2})$.

   (c) La fonction $h(x)=3\sin(2x)$ est continue sur $[0;\pi]$ comme composée de fonctions continues sur $[0;\pi]$ donc admet des primitives sur $[0;\pi]$.
   $H(x)=\frac{-3}{2}\cos(2x)$ est une primitive de h sur $[0;\pi]$ donc
   $K=H(\pi)-H(0)=\frac{-3}{2}\cos(2\pi)+\frac{3}{2}\cos(0)=\frac{-3}{2}+\frac{3}{2}=0$.

2. (a) $F(x)=x\ln(x)-x=x(\ln(x)-1)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.
   $\forall x>0, F'(x)=1(\ln(x)-1)+x\times\frac{1}{x}=\ln(x)-1+1=\ln(x)$ donc $F(x)=x\ln(x)-x$ est une primitive de Ln(x) sur $]0;+\infty[$.

   (b) $L=\int_{1}^{e}\ln(x)dx=F(e)-F(1)=(e\ln(e)-e)-(1\ln(1)-1)=0-(-1)=1$

Exercice 5 :

1. Déterminer le signe de l'intégrale $M=\int_0^1 e^{-x^2}dx$.
2. Soit $I=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ et $J=\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$.
   (a) Calculer I
   (b) Calculer I + J puis en déduire J

Correction

1. La fonction définie sur [0;1] par $f(x)=e^{-x^2}$ est strictement positive sur [0;1] donc $M=\int_0^1 e^{-x^2}dx>0$ par positivité de l'intégrale.

2. (a) $I=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}dx$ avec $u(x)=e^x+1>0$. $F(x)=\ln(e^x+1)$ est une primitive de $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ sur [0;1] donc $I=F(1)-F(0)=\ln(e+1)-\ln(2)=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

   (b) $I+J=\int_0^1 \left(\frac{e^x+1}{e^x+1}\right)dx=\int_0^1 dx=1$ donc $J=1-I=1+\ln(2)-\ln(e+1)$.

Exercice 6 :

1. Démontrer que $\forall x\in[0;1], e^{x^2}\leqslant e^x$.
2. En déduire que $0\leqslant\int_0^1 e^{x^2}dx\leqslant e-1$

Correction

1. $0\leqslant x\leqslant 1\Leftrightarrow 0\leqslant x^2\leqslant x\Leftrightarrow e^0\leqslant e^{x^2}\leqslant e^x\Leftrightarrow 1\leqslant e^{x^2}\leqslant e^x$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$. On déduit que $\forall x\in[0;1], e^{x^2}\leqslant e^x$.

2. $\forall x\in[0;1], 0\leqslant e^{x^2}\leqslant e^x$ donc $0\leqslant\int_0^1 e^{x^2}dx\leqslant\int_0^1 e^x dx$ donc $0\leqslant\int_0^1 e^{x^2}dx\leqslant\int_0^1 e^x dx$.
   Or $\int_0^1 e^x dx=[e^x]_0^1=e^1-e^0=e-1$ d'où $0\leqslant\int_0^1 e^{x^2}dx\leqslant e-1$.

Exercice 7

Calculer $I=\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$, $J=\int_1^{e} x\ln(x)\,dx$ et $K=\int_0^{\ln(2)} (x-1)e^x\,dx$.

Correction

- Calcul de $I=\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$

Posons $u(x)=x$ dérivable sur $[0;\pi]$ avec $u'(x)=1$.
Posons $v'(x)=\sin(x)$ continue sur $[0;\pi]$ avec $v(x)=-\cos(x)$.
A l'aide d'une intégration par parties (IPP), on obtient :

$$I=[-x\cos(x)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 1\times(-\cos(x))\,dx=[-x\cos(x)]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos(x)\,dx$$
$$I=[-x\cos(x)]_0^{\pi}+[\sin(x)]_0^{\pi}=(-\pi\cos(\pi)+0\cos(0))+(\sin(\pi)-\sin(0))=\pi$$

- Calcul de $J=\int_1^{e} x\ln(x)\,dx$

Posons $u(x)=\ln(x)$ dérivable sur $[1;e]$ avec $u'(x)=\frac{1}{x}$.
Posons $v'(x)=x$ continue sur $[1;e]$ avec $v(x)=\frac{x^2}{2}$.
A l'aide d'une intégration par parties (IPP), on obtient :

$$J=[\frac{x^2}{2}\ln(x)]_1^{e}-\int_1^{e}\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}[x^2\ln(x)dx]_1^{e}-\frac{1}{2}\int_1^{e} x\,dx=\frac{1}{2}[x^2\ln(x)]_1^{e}-\frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}]_1^{e}$$
$$J=\frac{1}{2}[x^2\ln(x)]_1^{e}-\frac{1}{4}[x^2]_1^{e}=\frac{1}{2}(e^2\ln(e)-1^2\ln(1))-\frac{1}{4}(e^2-1^2)=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$$

- Calcul de $K=\int_0^{\ln(2)} (x-1)e^x\,dx$

Posons $u(x)=x-1$ dérivable sur $[0;\ln(2)]$ avec $u'(x)=1$.
Posons $v'(x)=e^x$ continue sur $[0;\ln(2)]$ avec $v(x)=e^x$.
A l'aide d'une intégration par parties (IPP), on obtient :

$$K=[(x-1)e^x]_0^{\ln(2)}-\int_0^{\ln(2)} 1\times e^x\,dx=[(x-1)e^x]_0^{\ln(2)}-[e^x]_0^{\ln(2)}$$
$$K=((\ln(2)-1)e^{\ln(2)}-(0-1)e^0)-(e^{\ln(2)}-e^0)=2\ln(2)-2+1-2+1=2\ln(2)-2$$

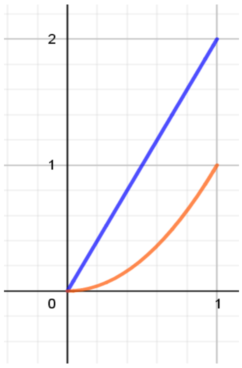
Exercice 8 :

Soit f et g les fonctions définies sur [0;1] par $f(x)=2x$ et $g(x)=x^2$.

1. Construire C_f et C_g dans un même repère orthogonal
2. Démontrer que $\forall 0\leqslant x\leqslant 1, f(x)\geqslant g(x)$
3. Calculer l'aire A_1 , en u.a, de la surface comprise entre C_g , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.
4. Calculer l'aire A_2 , en u.a, de la surface comprise entre les courbes C_f et C_g et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

Correction

1. Courbes ci-dessous



2. $x^2-2x=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1$

Or pour $0\leqslant x\leqslant 1$, on a $-1\leqslant x-1\leqslant 0$ donc $(x-1)^2\leqslant 1$ donc $(x-1)^2-1\leqslant 0$ donc $x^2-2x\leqslant 0$ donc $x^2\leqslant 2x$ donc $g(x)\leqslant f(x)$

3. $g(x)=x^2\geqslant 0$ pour $0\leqslant 0\leqslant 1$ donc $A_1=\int_0^1 x^2\,dx=[\frac{x^3}{3}]_0^1=\frac{1}{3}(1^3-0^3)=\frac{1}{3}$

4. $\forall 0\leqslant x\leqslant 1, f(x)\geqslant g(x)$ donc

$$A_2=\int_0^1 (2x-x^2)dx=2\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 x^2 dx=2\times[\frac{x^2}{2}]_0^1-A_1=[x^2]_0^1-A_1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Exercice 9 :

Calculer la valeur moyenne de la fonction carré sur [0;3].

Correction

$$\mu=\frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,dx=\frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}]_0^3=\frac{1}{9}(3^3-0^3)=\frac{27}{9}=3$$