82 Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x)=(1+x)e^{-x}.$$

1. a. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[1;5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $I_n=\int_1^n f(x)\,dx$.

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto (\alpha x+\beta)e^{-x}$ où α et β sont des réels. Déterminer les réels α et β tels que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire I_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de I_n. Donner une interprétation graphique de cette limite.

Exercice 82

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = (1+x)e^{-x}$

1) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$

$1 + x = 0 \iff x = -1$
$1 + x > 0 \iff x > -1$

On déduit le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (1+x) \times (-e^{-x})$

$f'(x) = e^{-x}(1 - 1 - x) = -xe^{-x}$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$

$-x = 0 \iff x = 0$
$-x > 0 \iff x < 0$

d'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

c) Voir calculatrice

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$

a) $\forall x \in [-1 ; +\infty[$, $f(x) \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [1 ; n]$, $f(x) \geq 0$

donc $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale

1/3

... a :

$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} f(x)\,dx - \int_1^n f(x)\,dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_1^n f(x)\,dx + \int_n^{n+1} f(x)\,dx - \int_1^n f(x)\,dx = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$

or $\forall x \in [n;n+1]$, $f(x) \geq 0$ donc $\int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq 0$ donc $I_{n+1} - I_n \geq 0$

donc (I_n) est croissante.

3) a) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto F(x) = (\alpha x + \beta)\, e^{-x}$ avec $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

F primitive de f sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$

" " $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha e^{-x} + (\alpha x + \beta) \times (-e^{-x}) = (1+x)\, e^{-x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \alpha e^{-x} - \alpha x e^{-x} - \beta e^{-x} - e^{-x} - x e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow e^{-x}\left(-\alpha x - x + \alpha - \beta - 1\right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En particulier, deux conditions nécessaires sont :

pour $x = 0$, $(\alpha - \beta - 1) = 0$

pour $x = 1$, $e^{-1}\left(-\cancel{\alpha} - 1 + \cancel{\alpha} - \beta - 1\right) = 0$

donc $-\beta - 2 = 0$ donc $\beta = -2$

on déduit que $\alpha + 2 - 1 = 0$ donc $\alpha + 1 = 0$ donc $\alpha = -1$

Posons $F(x) = (-x-2)\, e^{-x}$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -1\, e^{-x} + (-x-2) \times (-e^{-x})$

$F'(x) = -e^{-x} + x e^{-x} + 2 e^{-x} = x e^{-x} + e^{-x} = (x+1)\, e^{-x} = f(x)$

donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) $I_n = \int_1^n f(x)\,dx = F(n) - F(1) = (-n-2)\, e^{-n} - (-1-2)\, e^{-1}$

$I_n = \dfrac{-n-2}{e^n} - \dfrac{(-3)}{e} = -\dfrac{n+2}{e^n} + \dfrac{3}{e}$

2/3

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = -\dfrac{n}{e^n} - \dfrac{2}{e^n} + \dfrac{3}{e}$

$$I_n = -\frac{1}{\frac{e^n}{n}} - \frac{2}{e^n} + \frac{3}{e}$$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{e^n} = 0$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{\frac{e^n}{n}} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \dfrac{3}{e}$