80 Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^n t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \left(t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}.$$

a. Démontrer que, pour tout réel t, $f'(t) = 3t\sqrt{t^2+1}$.

b. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ?

3. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = \int_0^n \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t.$$

a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$.

b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties et pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de u_n, puis en fonction de n.

c. Calculer $\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 80

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^n t\sqrt{t^2+1}\ dt$

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} t\sqrt{t^2+1}\ dt - \int_0^n t\sqrt{t^2+1}\ dt$$

$$u_{n+1} - u_n = \cancel{\int_0^n t\sqrt{t^2+1}\ dt} + \int_n^{n+1} t\sqrt{t^2+1}\ dt - \cancel{\int_0^n t\sqrt{t^2+1}\ dt}$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} t\sqrt{t^2+1}\ dt$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [n, n+1]$, $t \geq 0$ et $\sqrt{t^2+1} \geq 0$ donc $t\sqrt{t^2+1} \geq 0$

donc par positivité de l'intégrale, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto f(t) = (t^2+1)\sqrt{t^2+1}$

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $t^2+1 > 0$ sur $\mathbb{R}$. On déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2t\sqrt{t^2+1} + (t^2+1) \times \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}$$

$$f'(t) = 2t\sqrt{t^2+1} + t\sqrt{t^2+1} = 3t\sqrt{t^2+1}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^n t\sqrt{t^2+1}\ dt = \frac{1}{3}\int_0^n f(t)\ dt$

$$u_n = \frac{1}{3}\left(f(n) - f(0) \right)$$

$$\cancel{u_n = \frac{1}{3}\left(3n\sqrt{n^2+1} - 0 \right)}$$

$$\cancel{u_n = n\sqrt{n^2+1}}$$

$$u_n = \frac{1}{3}\left((n^2+1)\sqrt{n^2+1} - 1 \right)$$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2+1)\sqrt{n^2+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc (u_n) diverge

1/1