70 Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,dt$.

1. Calculer u_1.
2. Simplifier puis calculer $u_0 + u_1$.
3. En déduire la valeur de u_0.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n + u_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n}$.
5. Calculer les valeurs exactes de u_2, u_3 et u_4.
6. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t - 1)}{1+e^t}\,dt$.
7. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 70

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,dt$

1) $u_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \left[1+e^t\right]_0^1 = (1+e) - 2 = e - 1$

2) $u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^t}\,dt + \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$

$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1+e^t}{1+e^t}\,dt$ par linéarité de l'intégrale

$u_0 + u_1 = \int_0^1 dt = 1$

3) donc $u_0 = 1 - u_1 = 1 - (e-1) = 1 - e + 1 = -e + 2 = 2 - e$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,dt + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}\,dt$

$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} + \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}\,dt$

$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\left(1+e^t\right)dt = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1}\,dt$

$u_n + u_{n+1} = \left[\frac{e^{nt}}{n}\right]_0^1 = \frac{e^n}{n} - \frac{1}{n} = \frac{e^n - 1}{n}$

5) Pour $n = 1$, $u_1 + u_2 = \frac{e-1}{1} = e - 1$

donc $u_2 = (e-1) - u_1 = (e-1) - (e-1) = 0$

Pour $n = 2$, $u_2 + u_3 = \frac{e^2-1}{2}$

donc $u_3 = \frac{e^2-1}{2} - u_2 = \frac{e^2-1}{2} - 0 = \frac{e^2-1}{2}$

Pour $n = 3$, $u_3 + u_4 = \frac{e^3-1}{3}$

donc $u_4 = \frac{e^3-1}{3} - u_3 = \frac{e^3-1}{3} - \frac{e^2-1}{2} = \frac{2e^3 - 2 - 3e^2 + 3}{6}$

1

donc $u_4 = \dfrac{2e^3-3e^2+1}{6}$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1}-u_n = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}\,dt - \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,dt$$

$$u_{n+1}-u_n = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}-e^{nt}}{1+e^t}\,dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$u_{n+1}-u_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t-1)}{1+e^t}\,dt$$

7) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $\forall t \in [0;1]$, $e^{nt} > 0$

$\forall t \in [0,1]$, $1+e^t > 0$

$\forall t \in [0;1]$, on a $0 \leq t \leq 1$

donc $e^0 \leq e^t \leq e^1$ car $x \mapsto e^x$ croissante sur $\mathbb{R}$

donc $1 \leq e^t \leq e$

donc $0 \leq e^t - 1 \leq e-1$

Conclusion : $\forall t \in [0;1]$, $\dfrac{e^{nt}(e^t-1)}{1+e^t} \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, on a $u_{n+1}-u_n \geq 0$ donc (u_n) croissante.