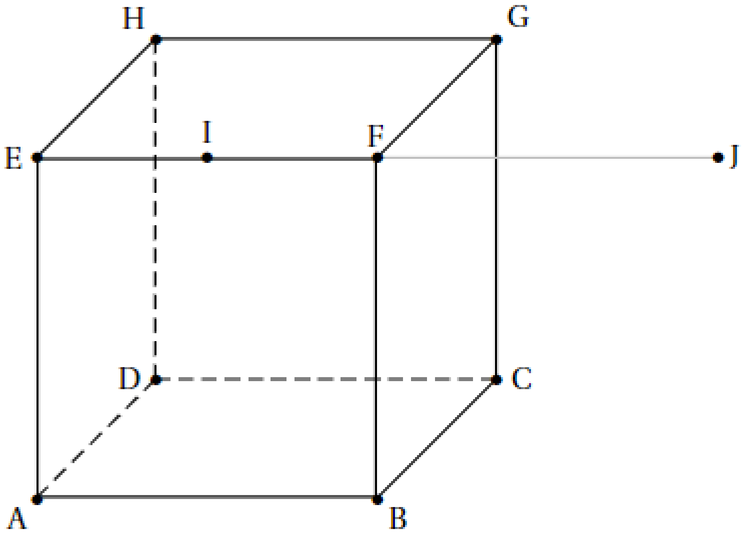
EXERCICE 2 commun à tous les candidats **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.
   b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.
   c. Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.
2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   b. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{5}{6}\right)$.
   Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).
3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$$

   où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.
   a. Calculer le volume de la pyramide FBGI.
   b. En déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

Les sommets du cube ont pour coordonnées : $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. a.
- Le point I est le milieu de [EF] donc I a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$.
- Le point J est le symétrique de E par rapport à F, donc J a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

b. On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

c.
- Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (BGI).
- $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = -1+0+1=0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$.
- $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 0-1+1=0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan (BGI).

d.
- Le vecteur $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI) donc le plan (BGI) a une équation de la forme $2x-y+z+d=0$.
- Le point B appartient au plan (BGI) donc les coordonnées de B vérifient l'équation du plan ; donc $2x_B-y_B+z_B+d=0$, ce qui équivaut à $2-0+0+d=0$, ce qui veut dire que $d=-2$.

Donc une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x-y+z-2=0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a. La droite d est orthogonale au plan (BGI), et $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI), donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Le point F appartient à la droite d donc la droite d est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DJ}$ soient colinéaires.

$\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DJ}$ colinéaires $\iff \overrightarrow{FM} = t.\overrightarrow{DJ} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 & = & t\times 2 \\ y-0 & = & t\times(-1) \\ z-1 & = & t\times 1 \end{array}\right.$

Donc la droite d a pour équation $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -t \\ z & = & 1+\ t \end{array}\right. , t\in\mathbb{R}$

b. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{5}{6}\right)$.

- Pour prouver que $\mathrm{L}\in d$, on cherche t pour que $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{2}{3} & = & 1+2t \\ \frac{1}{6} & = & -t \\ \frac{5}{6} & = & 1+\ t \end{array}\right.$

  On trouve $t=-\dfrac{1}{6}$ donc $\mathrm{L}\in d$.

- Le plan (BGI) a pour équation $2x-y+z-2=0$; or $2x_{\mathrm{L}}-y_{\mathrm{L}}+z_{\mathrm{L}}-2=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}-2=0$, donc $\mathrm{L}\in(\mathrm{BGI})$.

Le point L est donc le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3. a. La pyramide FBGI a pour base le triangle rectangle FBG, et pour hauteur IF.

- $\mathrm{IF}=\dfrac{1}{2}$
- Le triangle rectangle FBG a pour aire $\dfrac{\mathrm{FG}\times\mathrm{FB}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Le volume de la pyramide FBGI est donc $\mathscr{V}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$.

b. La droite d est orthogonale au plan (BGI) et coupe ce plan en L. Le point F appartient à la droite d, donc on peut dire que la distance FL est la distance du point F au plan (BGI), autrement dit c'est la hauteur de la pyramide FBGI dont le triangle BGI est la base.

$\mathrm{FL}^2=\left(\dfrac{2}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{6}-0\right)^2+\left(\dfrac{5}{6}-1\right)^2=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ donc $\mathrm{FL}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du triangle BGI. On exprime le volume de la pyramide FBGI :

$\mathscr{V}=\dfrac{1}{3}\times\mathrm{FL}\times\mathscr{A}\iff\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\mathscr{A}\iff\dfrac{3\times\sqrt{6}}{12}=\mathscr{A}\iff\mathscr{A}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$