Exercice n° 56 p 104

1) a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ par le projeté orthogonal sur (AB)

$= \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = a^2$

b) $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HF} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}\right) \cdot \overrightarrow{HF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{HF} = 0$ car les diagonales d'un carré se coupent perpendiculairement en leur milieu.

c) $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{CG} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}\right) \cdot \overrightarrow{CG}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CG}$ par projeté orthogonal sur (CG)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}^2 = \frac{1}{2}CG^2 = \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^2}{2}$

2) a) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{IJ} = \quad + \overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}\right) + \overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}\right)$

$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{EF}\right) + \overrightarrow{EB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE}\right) + \overrightarrow{EB} \cancel{- \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}} \cancel{+ \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$ car $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$.

Autre méthode

Le triangle BGE est équilatéral de côté $\sqrt{2}a$.
Or I et J sont les milieux respectifs de [EG] et [BG] donc d'après la propriété de la droite des milieux dans un triangle on déduit que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$.

b) $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EA} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EA}$ par le projeté orthogonal sur (EA)

$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}^2 = \frac{a^2}{2}$

Exercice 59 p 104

de mani

1) $\vec{AI} = \vec{AC} + \vec{CI} = \left(\vec{AB} + \vec{AD}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{CD} + \vec{CG}\right)$

$\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\left(-\vec{AB} + \vec{AE}\right)$

$\vec{AI} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$

$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$

$\vec{BJ} = \vec{BA} + \vec{AJ} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$.

2) a) $\vec{AI} \cdot \vec{BJ} = \left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}\right) \cdot \left(-\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\right)$

$= -\frac{1}{2}\vec{AB}\cdot\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AB}\cdot\vec{AD} - \vec{AD}\cdot\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\cdot\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AE}\cdot\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AE}\cdot\vec{AD}$

$= -\frac{1}{2}AB^2 + 0 - 0 + \frac{1}{2}AD^2 - 0 + 0$

$= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$

b) $\vec{AI} \cdot \vec{BJ} = 0$ donc (AI) et (BJ) sont perpendiculaires.

Exercice 61 p104

1) $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = \left(2\vec{AB} + 3\vec{AD} + 4\vec{AE}\right) \cdot \left(\vec{AB} - 2\vec{AD} + \vec{AE}\right)$

$= 2\vec{AB}^2 - 6\vec{AD}^2 + 4\vec{AE}^2$ car $\vec{AB}\cdot\vec{AD} = \vec{AB}\cdot\vec{AE} = \vec{AD}\cdot\vec{AE} = 0$

$= 2a^2 - 6a^2 + 4a^2$

$= 0$

2) $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = 0$ donc MAN est un triangle rectangle en A.

Exercice 62 p104

1) Vrai car $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$ avec θ une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ avec $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \iff \cos\theta = 1$

$\iff \theta = 0$

$\iff$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaire de même sens

2) "Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaire alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$".

Cette réciproque est fausse lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas de même sens.

Exercice 63 p 104

1) $\overrightarrow{AB}(7;-1;3)$ $\overrightarrow{AC}(1;4;-1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7\times 1 + (-1)\times 4 + 3\times(-1) = 7-4-3 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ donc ABC est rectangle en A

Exercice 64 p 104

1) $\overrightarrow{AB}(2;2;3)$ $\overrightarrow{DC}(2;2;3)$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

2) a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 2\times 1 + 2\times 2 + 3\times(-2) = 2+4-6 = 0$

avec $\overrightarrow{AB}(2;2;3)$ et $\overrightarrow{AD}(1;2;-2)$

b) ABCD est un parallélogramme tel que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ donc il possède un angle droit donc ABCD est un rectangle.

Comme $AB = \sqrt{2^2+2^2+3^2} = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$ et $AD = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3 \neq \sqrt{17}$

le rectangle ABCD n'est pas un carré.

Exercice 65 p 104

1) $\overrightarrow{AB}(7;4;-2)$ $\overrightarrow{DC}(7;4;-2)$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

2) a) $\overrightarrow{AC}(6;6;-10)$ $\overrightarrow{BD}(-8;-2;-6)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 6\times(-8) + 6\times(-2) + (-10)\times(-6)$

$= -48 - 12 + 60 = 0$ donc $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

Le parallélogramme ABCD ~~est~~ a des diagonales perpendiculaires donc ABCD est un losange.

Or $AC = \sqrt{6^2+6^2+(-10)^2} = \sqrt{36+36+100} = \sqrt{172}$

$BD = \sqrt{(-8)^2+(-2)^2+(-6)^2} = \sqrt{64+4+36} = \sqrt{104} \neq \sqrt{172}$

Les diagonales n'ont pas de même longueur donc le losange ABCD n'est pas un carré.

Exercice 66 p 104

$\vec{AB}(-2;-7;3)$ $\vec{AC}(3;-8;4)$ $\vec{BC}(5;-1;1)$

1) $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = (-2)\times 5 + (-7)\times(-1) + 3\times 1 = -10+7+3=0$

donc $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ donc ABC est rectangle en B

$AB = \sqrt{(-2)^2+(-7)^2+3^2} = \sqrt{4+49+9} = \sqrt{62}$

$BC = \sqrt{5^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{27} \neq \sqrt{62}$

$\Big\}$ donc ABC n'est pas isocèle en B

2) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -2\times 3 + (-7)\times(-8) + 3\times 4 = -6+56+12 = 62$

Exercice 67 p104

1) $\vec{DM} = x\vec{DF} = x(\vec{DA}+\vec{AB}+\vec{BF}) = x\vec{DA} + x\vec{AB} + x\vec{BF}$

$\vec{DM} = x\vec{DA} + x\vec{DC} + x\vec{DH}$ car $\vec{AB}=\vec{DC}$ et $\vec{BF}=\vec{DH}$

donc $M(x;x;x)$ dans $(D;\vec{DA},\vec{DC},\vec{DH})$

2) $\vec{ME}\cdot\vec{MB} = (1-x)\times(1-x) + (0-x)\times(1-x) + (1-x)\times(0-x)$

avec $E(1;0;1)$ $B(1;1;0)$

$\vec{ME}\cdot\vec{MB} = (1-x)^2 - x + x^2 - x + x^2$

$\vec{ME}\cdot\vec{MB} = 1-2x+x^2 - x + x^2 - x + x^2$

$= 1 - 4x + 3x^2 = 3x^2 - 4x + 1$

or $\Delta = (-4)^2 - 4\times 3 = 16-12 = 4$

donc l'équation $3x^2-4x+1=0$ admet deux solutions distinctes

dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{6} = 1$

or seule $x_1 \in]0;1[$ donc il existe un unique point

$M(1/3;1/3;1/3)$ pour lequel MEB soit rectangle en M.

Exercice 72 p 105

1) a) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(BC^2 - AB^2 - AC^2\right)$

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(5^2 - 7^2 - 8^2\right) = \frac{1}{2}\left(25 - 49 - 64\right) = \frac{1}{2}\times(-88) = -44$

or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = 44$

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 7\times 8 \times \cos(\widehat{BAC}) = 56\cos(\widehat{BAC})$

or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 44$ d'après le 1) b)

donc $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{44}{56} = \frac{11}{14}$ donc $\widehat{BAC} \simeq 38°$ arrondi au °

Exercice 74 p 105

1) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}\|^2\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{DB}\|^2 - \|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}\|^2\right)$

$= \frac{1}{4}\left(DB^2 - \|-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\|^2\right)$

$= \frac{1}{4}\left(BD^2 - \|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\|^2\right)$

$= \frac{1}{4}\left(BD^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$ car ABCD parallélogramme

$= \frac{1}{4}\left(BD^2 - AC^2\right)$

2) ABCD est un parallélogramme.

ABCD est un rectangle $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

Suite

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(BD^2 - AC^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow BD^2 = AC^2$

$\Leftrightarrow BD = AC$

$\Leftrightarrow$ diagonales de même longueur.

Exercice 76 p 105

1) $\vec{AB}(1;-6;3)$ $\vec{AC}(2;2;1)$

or $\frac{2}{1} \neq \frac{2}{-6}$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires donc A, B et C définissent un plan.

2) $\vec{DE}(-12;5;14)$

$\vec{DE}\cdot\vec{AB} = -12\times1 + 5\times(-6) + 14\times3$
$= -12-30+42=0$ donc $\vec{DE}\perp\vec{AB}$

3) $\vec{DE}\cdot\vec{AC} = -12\times2+5\times2+14\times1 = -24+10+14=0$
donc $\vec{DE}\perp\vec{AC}$

(DE) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC)
donc $(DE)\perp(ABC)$.

Exercice 83 p 106

1) a) ABED est un rectangle donc $(AD)\perp(DE)$
ADFC est un rectangle donc $(AD)\perp(DF)$
On déduit que (AD) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (FDE) donc (AD) est perpendiculaire au plan (FDE).

b) (AD) est perpendiculaire au plan (DFE) donc (AD) est orthogonale à toute droite incluse dans (DFE) donc en particulier à (FH).
Or (FH) est perpendiculaire à (DE) comme hauteur issue de F du triangle FDE.
On déduit que (FH) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ADE) donc (FH) est perpendiculaire au plan (ADE).

2) (FH) est perpendiculaire au plan (ADE) donc (FH) est orthogonale à toute droite incluse dans (ADE) donc en particulier à (HA) et (HB)
donc FHA est rectangle en H et FHB est rectangle en H.