Chapitre 9: Produit scalaire dans l'espace

I. Produit scalaire dans l'espace

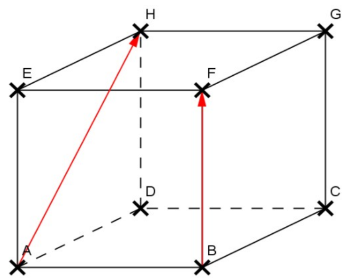
1. Approche géométrique du produit scalaire

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A,B,C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan *(P)* contenant les points A,B et C.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, **le produit scalaire** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan *(P)*.
Ainsi,

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}=AB\times AC\ \cos\widehat{BAC}}$
- si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est nul

Exercice 1 :
Dans le cube ABCDEFGH ci-contre de côté a , montrer que $\vec{u}.\vec{v}=a^2$



Propriété :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ alors

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}}$$

où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et K le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

Propriété :

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace et k un réel alors :

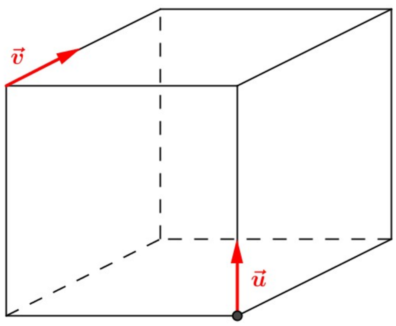
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$

Remarque : toutes les propriétés du produit scalaire énoncés dans le plan s'appliquent dans l'espace à des points et des vecteurs coplanaires.

2. Caractérisation vectorielle de l'orthogonalité

Définition :

- Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux s'ils dirigent des droites orthogonales.
- Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.



Ci-contre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Propriété : Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

Preuve :

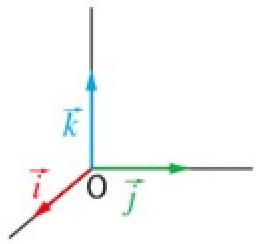
- *Si* $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ *alors* $\vec{u}.\vec{v}=0$ *d'après la définition.*
- *Si u et v ne sont pas nuls, alors considérons les points A, B et C tels que* $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

  $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont orthogonales ce qui équivaut à* $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{2}$ *donc à* $\cos\widehat{BAC}=0$ *et à* $\vec{u}.\vec{v}=0$. #

II. Produit scalaire dans un repère de l'espace

1. Expression analytique du produit scalaire

Définition : On appelle **base orthonormée** de l'espace toute base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace telle que les vecteurs $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont **deux à deux orthogonaux** et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$.
Un **repère** $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est dit **orthonormé** si et seulement si la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormée.



Propriété : Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

- Si $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ alors $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'}$
- En particulier $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{u}=x^2+y^2+z^2}$ **et** $\boldsymbol{\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
- Si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors $\boldsymbol{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$

Remarque : Si u et v sont des vecteurs directeurs respectifs des droites (d) et (d') alors (d) et (d') sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

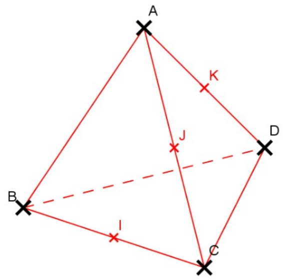
Preuve :
Soit $\vec{i}=\overrightarrow{OI},\vec{j}=\overrightarrow{OJ},\vec{k}=\overrightarrow{OK}$. *On a* $\vec{i}.\vec{i}=OI\times OI\times\cos(0)=1$.
De même, $\vec{j}.\vec{j}=1$ et $\vec{k}.\vec{k}=1$.
Les vecteurs i , j et k étant orthogonaux, on a $\vec{i}.\vec{j}=\vec{i}.\vec{k}=\vec{j}.\vec{k}=0$ *donc :*

- $\vec{u}.\vec{v}=xx'\vec{i}.\vec{i}+yy'\vec{j}.\vec{j}+zz'\vec{k}.\vec{k}+(xy'+x'y)\vec{i}.\vec{j}+(xz'+x'z)\vec{i}.\vec{k}+(yz'+y'z)\vec{j}.\vec{k}$
  d'où $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$
- $\vec{u}.\vec{u}=xx+yy+zz=x^2+y^2+z^2$ *. Or* $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ *donc* $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- *On a* $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ et $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ #

Exercice 2 :

Soit ABCD un tétraèdre régulier de côté a. Les points I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AD].

Calculer les produits scalaires suivants :



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{BC}$

Exercice 3 :

Soit ABCD un tétraèdre régulier de côté a.

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$. Que pouvez-vous en déduire des droites (AB) et (CD) ?

Exercice 4 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $A(1;5;-3), B(3;9;3) et C(9;7;-7)$. I est le milieu de [BC].

1. Montrer que ABC est un triangle rectangle en A
2. Déterminer une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAI}$ au radian près.

2. Formules de polarisation

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace $\boldsymbol{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2}$

Preuve :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$

Or $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ et $\vec{v}.\vec{v}=\|\vec{v}\|^2$ et $\vec{v}.\vec{u}=\vec{u}.\vec{v}$

d'où $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{v}\|\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ #

Propriété : **Formules de polarisation**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

$$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right) \quad \text{et} \quad \vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

Preuve :

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

donc $2\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$ *donc* $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}+(-\vec{v})\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.(-\vec{v})+\|-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

car $\vec{u}.(-\vec{v})=-\vec{u}.\vec{v}$ et $\|(-\vec{v})\|^2=\|\vec{v}\|^2$

d'où $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\left(\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\right)-\left(\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\right)=4\vec{u}.\vec{v}$

d'où $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ #

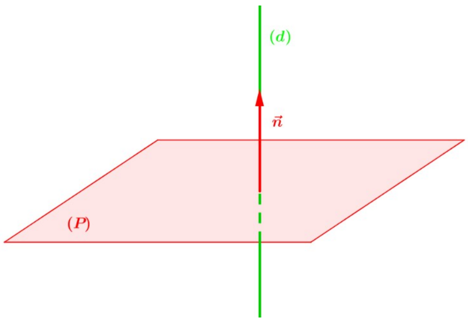
Application : la 1ère formule permet de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ uniquement en fonction de Ab, AC et BC . En effet, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}(BC^2-AB^2-AC^2)$.

II. Application du produit scalaire

1. Vecteur normal à un plan

Toutes les droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles et ont par conséquent des vecteurs directeurs colinéaires d'où :

Définition : Un vecteur $\vec{n}$ <u>non nul</u> est dit **orthogonal à un plan** si ce vecteur est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan.
Ce vecteur n est alors appelé **vecteur normal** au plan.



Conséquence : tous les vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires entre eux.

Propriété : Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** à un plan si et seulement si il est **orthogonal à deux vecteurs non colinéaires** de ce plan.

Preuve :
Une droite (d) est orthogonale à un plan (P) si et seulement si elle est orthogonale à deux droites (d_1) et (d_2) sécantes de ce plan.
Soit $\vec{n}$ un vecteur directeur de (d) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à (P).
Soit $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs directeurs de (d_1) et (d_2) .
(d_1) et (d_2) sont sécantes donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires.
Ainsi, dire que (d) est orthogonal à (P) si et seulement si (d) est orthogonale à deux droites sécantes de (P) équivaut à dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ de (P). #

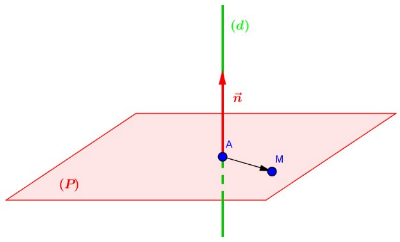
Théorème : Une droite (d) est **orthogonale** à toute droite d'un plan (P) si et seulement si elle est orthogonale à deux droites **sécantes** (d_1) et (d_2) de ce plan.

Preuve :
si (d) est orthogonale à toute droite du plan (P) alors elle est en particulier orthogonale aux droites (d_1) et (d_2) incluses dans ce plan.
Réciproquement, si $\vec{u}, \vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont respectivement des vecteurs directeurs des droites

$(d),(d_1)$ et (d_2) *alors* $\vec{u}.\vec{v}_1=0$ et $\vec{u}.\vec{v}_2=0$ *puisque* (d) *est orthogonale à* (d_1) et (d_2) .
Soit (Δ) *une droite du plan (P) de vecteur directeur* $\vec{w}$.
Les droites (d_1) et (d_2) *étant sécantes, les vecteurs* $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ *ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan (P).*
Il existe donc deux réels x et y *tels que* $\vec{w}=x\vec{v}_1+y\vec{v}_2$.
On déduit que $\vec{u}.\vec{w}=\vec{u}.(x\vec{v}_1+y\vec{v}_2)=x\vec{u}.\vec{v}_1+y\vec{u}.\vec{v}_2=0$ *donc* (d) *est orthogonale à* (Δ) #

2. Équations cartésiennes d'un plan

Propriété : Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.
L'unique plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.



Preuve :
Soit M un point du plan (P) et (d) une droite de vecteur directeur $\vec{n}$.
Les points A et M appartiennent au plan (P) donc la droite (AM) est incluse dans (P).
Comme $\vec{n}$ *est normal à (P) et directeur de (d) alors (d) est perpendiculaire à (P) donc orthogonale à toutes les droites de (P) donc en particulier à (AM).*
On en déduit que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.
Alors, soit M est confondu avec A, soit (AM) est orthogonale (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$ *c'est à dire que M appartient au plan contenant A et orthogonal à (d).* #

Propriétés :

- Dans un repère orthonormé, u plan (P) de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.
- Réciproquement, si $a, b \text{ et } c$ ne sont pas tous nuls, l'ensemble (E) des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Preuve :

- *Soit* $A(x_0;y_0;z_0)$ *un point du plan (P) et* $M(x;y;z)$ *un point de l'espace.*

  On a $\overrightarrow{AM}(x-x_0;y-y_0;z_z-0)$ et $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$

  M appartient à (P) équivaut à $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
  soit $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
  soit encore $ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0$
  soit en posant $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$ *, on obtient* $ax+by+cz+d=0$

- Réciproquement, puisque $a, b \text{ et } c$ ne sont pas tous nuls on peut supposer par exemple $a\neq 0$.
  Le point $A(\frac{-d}{a};0;0)$ appartient à l'ensemble (E) et l'équation $ax+by+cz+d=0$ équivaut à $a(x+\frac{d}{a})+by+cz=0$ c'est à dire $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ avec $\vec{n}(a;b;c)$ #

Exercice 5 :
ABCDEFGH est un cube de côté a.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}$.
   Que peut-on en conclure sur les droites (AG) et (BE) ?
3. On démontre e même que (AG) et (DE) sont orthogonales. En déduire que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

Exercice 6 :
Soit $A(-1;3;4)$ un point de l'espace et $\vec{n}(-2;1;5)$ un vecteur.
Déterminer de deux façons différentes une équation du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exercice 7 :
Donner un vecteur normal de chacun des plan suivants :

$$(P_1):4x+3y-z+2=0 \text{ et } (P_2):2y+z+1=0$$

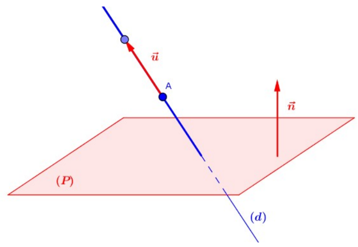
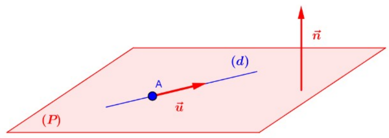
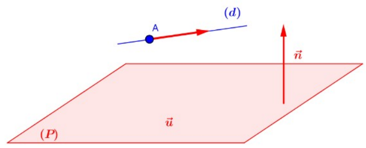
III. Intersection de droites et de plans

1. Intersection d'une droite et d'un plan

Propriété : Soit (d) une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

(1) Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux alors la droite (d) et le plan (P) sont sécants.
(2) Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux alors :
- si A appartient à (P) alors la droite (d) est incluse dans le plan (P)
- si A n'appartient pas à (P) alors la droite (d) est strictement parallèle au plan (P)

Remarque : si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite (d) et $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan (P) , (d) et (P) sont sécants si et seulement si le produit scalaire $\vec{u}.\vec{n}\neq 0$

La droite est sécante au plan	La droite est incluse dans le plan	La droite est strictement parallèle au plan
		

2. Intersection de deux plans

Propriété : Soit deux plans (P) et (P') de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

1. Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires alors les plans (P) et (P') sont parallèles
2. Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires alors les plans (P) et (P') sont sécants : leur intersection est une droite

Remarque : deux plans sont soit confondus, soit strictement parallèles, soit sécants.

Propriété : On se place dans un repère orthonormé.

1. Les plans $(P): ax+by+cz+d=0$ et $(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont sécants si et seulement si le triplet $(a;b;c)$ n'est pas proportionnel au triplet $(a';b';c')$.

2. Lorsque les deux triplets ne sont pas proportionnels , l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x;y;z)$ vérifient le système $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ est une droite.

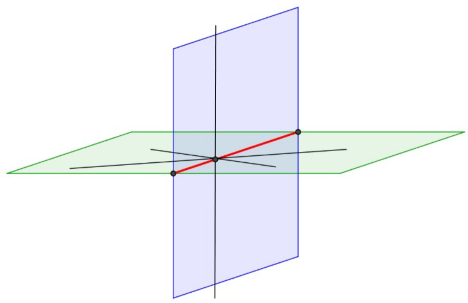
Preuve :

1. *Les vecteurs* $\vec{n}(a;b;c)$ *et* $\vec{n}'(a';b';c')$ *ont des vecteurs normaux respectifs des plans (P) et (P').*
2. *Ces plans sont donc parallèles si et seulement si* $\vec{n}$ *et* $\overrightarrow{n'}$ *sont colinéaires c'est à dire si et seulement si le triplet* $(a;b;c)$ *est proportionnel au triplet* $(a';b';c')$

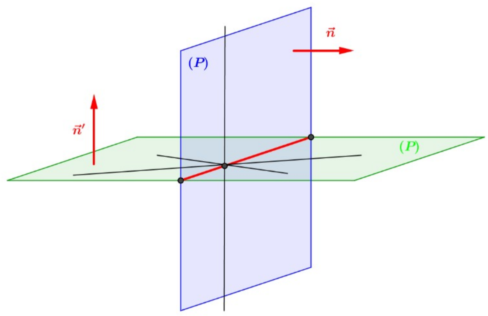
#

3. Plans perpendiculaires

Définition : Deux plans sont dits perpendiculaires si l'un des deux contient une droite perpendiculaire à l'autre plan.



Propriété : Soit (P) et (P') deux plans de vecteurs normaux respectifs n et n' .
(P) et (P') sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs n et n' sont orthogonaux.



Exercice 8 :

Soit (P) le plan d'équation $4x+3y-2z+3=0$.

Les droites (d_1) et (d_2) sont définies par une représentation paramétrique (avec $t\in\mathbb{R}, t'\in\mathbb{R}$ donnée ci-dessous :

$$(d_1)\left|\begin{array}{l} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=-1+t \end{array}\right. \qquad (d_2)\left|\begin{array}{l} x=t' \\ y=3+t' \\ z=3+2t' \end{array}\right.$$

1. Le plan (P) et la droite (d_1) sont-ils sécants ?
2. Déterminer l'intersection du plan (P) et de la droite (d_2) .

Exercice 9 :

On considère les plans $(P_1): 2x-3y+z-1=0$ et $(P_2): 4x-5y+3z-3=0$.

1. Démontrer que (P_1) et (P_2) sont sécants.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) intersection de (P_1) et (P_2)
3. Démontrer que le plan (P_1) est perpendiculaire au plan $(P_3): x+2y+4z-6=0$.

Propriété :

(1) Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si un vecteur directeur de (D) est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires de (P).

(2) Deux plans (P) et (P') sont parallèles si et seulement si deux vecteurs non colinéaires de (P) sont respectivement égaux à deux vecteurs du plan (P').