Exercice 1

Les questions 1. 2. 3. et 4. sont indépendantes. L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point A(2;5;-3) et dirigée par le vecteur $\vec{u}(3;2;-3)$.
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) avec A(1;3;-2) et B(2;5;-4).
   (c) Etudier la porsition relative des droites (d) et (AB) dans l'espace ?

2. On considère les droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques :

$$(d_1):\begin{cases} x=-5+2t \\ y=11-3t \\ z=11-2t \end{cases},t\in\mathbb{R} \text{ et } (d_2):\begin{cases} x=7-4t' \\ y=1-2t' \\ z=-2+5t' \end{cases},t'\in\mathbb{R}$$

   Montrer que (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point dont on donnera les coordonnées.

3. On considère les points A(1;2;7) et B(3;-1;6) et la droite (D) admettant pour représentation paramétrique

$$(D):\begin{cases} x=5-4t \\ y=1+6t \\ z=-3+2t \end{cases},t\in\mathbb{R}$$

   (a) Le point A appartient-il à (D) ?
   (b) Les droites (AB) et (D) sont-elles parallèles ?

4. On considère les points A(2;2;0) , B(0;1;0) , C(1;0;1) et D(0;0;3) et E(-1;4;0).
   (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une base de l'espace.
   (b) Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$, donner les coordonnées du point E.

Exercice 2

Les questions 1. & 2. ci-dessous sont indépendantes.

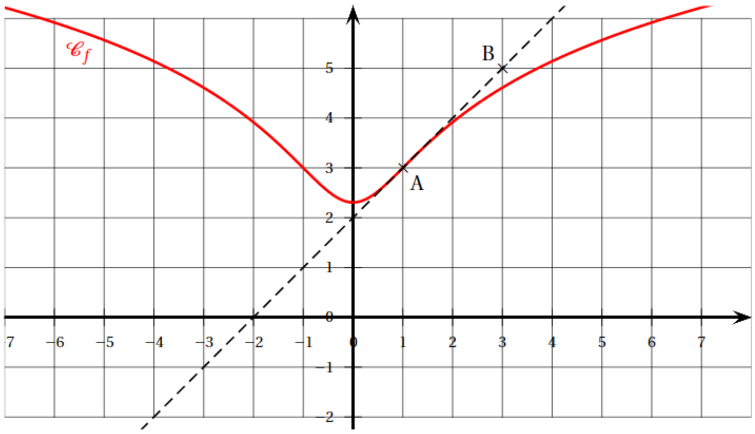
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $6x^2+x-1=0$.
   (a) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $6(\ln(x))^2+\ln(x)-1=0$.
   (b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $6e^{2x}+e^{x}-1=0$.

2. X est une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p = 0,3.
   Par le calcul, déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel la probabilité d'obtenir au moins un succès est supérieur ou égal à 0,995.

Exercice 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1;3) et B(3;5).

On donne ci-dessous C_f, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan, ainsi que la tangente (AB) à C_f au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x)=\ln(ax^2+1)+b$ avec $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}, a>0$ et $b>0$.
   (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+1)+3-\ln(2)$.

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (b) Etudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. A l'aide du tableau de variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x)=k$ admet exactement deux solutions. Vous justifierez rigoureusement votre réponse.
5. Résoudre l'équation $f(x)=3+\ln(2)$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+1)+3-\ln(2)$.

1. Par lecture graphique, conjecturer les abscisses des éventuels points d'inflexion de C_f .
2. Montrer que, pour tout réel x , $f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.
3. (a) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

   (b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à C_f au point A d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

   (c) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}, -1<x<1, \ln(x^2+1)\geqslant\dfrac{4}{5}x-\dfrac{2}{5}+\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$.

Correction

Exercice 1

Les questions 1. 2. 3. et 4. sont indépendantes. L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. (a) Une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point A(2;5;-3) et dirigée par le vecteur $\vec{u}(3;2;-3)$ est donnée par $(d):\begin{cases} x=2+3t \\ y=5+2t \\ z=-3-3t \end{cases},t\in\mathbb{R}$.

(b) Une représentation paramétrique de la droite (AB) passant par le point A(1;3;-2) et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}(1;2;-2)$ est donnée par $(AB):\begin{cases} x=1+t \\ y=3+2t \\ z=-2-2t \end{cases},t\in\mathbb{R}$.

(c) $\vec{u}(3;2;-3)$ et $\overrightarrow{AB}(1;2;-2)$. Or, $\frac{3}{1}\neq\frac{2}{2}$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (d) et (AB) ne sont pas parallèles.

Recherche d'un éventuel point d'intersection

$$M(x;y;z)\in(d)\cap(AB)\Leftrightarrow\begin{cases} x=2+3t \\ y=5+2t \\ z=-3-3t \\ x=1+t \\ y=3+2t \\ z=-2-2t \end{cases},t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases} 2+3t=1+t \\ 5+2t=3+2t \\ -3-3t=-2-2t \\ x=1+t \\ y=3+2t \\ z=-2-2t \end{cases},t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases} 2t=-1 \\ 3=5 \\ t=-1 \\ x=1+t \\ y=3+2t \\ z=-2-2t \end{cases},t\in\mathbb{R}$$

Or, $3\neq5$ donc les droites (d) et (AB) ne sont pas sécantes.

Conclusion : (d) et (AB) sont ni parallèles ni sécantes donc (d) et (AB) ne sont pas coplanaires.

2. $$M(x;y;z)\in(d_1)\cap(d_2)\Leftrightarrow:\begin{cases} x=-5+2t \\ y=11-3t \\ z=11-2t \\ x=7-4t' \\ y=1-2t' \\ z=-2+5t' \end{cases},t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow:\begin{cases} -5+2t=7-4t' \\ 11-3t=1-2t' \\ 11-2t=-2+5t' \\ x=-5+2t \\ y=11-3t \\ z=11-2t \end{cases},t\in\mathbb{R}$$

$$M(x;y;z)\in(d_1)\cap(d_2)\Leftrightarrow:\begin{cases} t=6-2t' \\ 11-18+6t'=1-2t' \\ 11-12+4t'=-2+5t' \\ x=-5+2t \\ y=11-3t \\ z=11-2t \end{cases},t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow:\begin{cases} t=6-2t' \\ 8t'=8 \\ t'=1 \\ x=-5+2t \\ y=11-3t \\ z=11-2t \end{cases},t\in\mathbb{R}$$

$$M(x;y;z)\in(d_1)\cap(d_2)\Leftrightarrow\begin{cases}t=6-2=4\\ t'=1\\ t'=1\\ x=-5+2t\\ y=11-3t\\ z=11-2t\end{cases},t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow:\begin{cases}t=4\\ t'=1\\ t'=1\\ x=3\\ y=-1\\ z=3\end{cases},t\in\mathbb{R}$$

Conclusion : (d_1) et (d_2) dont sécantes en M(3;-1;3).

3. $$A(1;2;7)\in(D):\begin{cases}1=5-4t\\ 2=1+6t\\ 7=-3+2t\end{cases},t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}4t=4\\ 6t=1\\ 2t=10\end{cases},t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\ t=\frac{1}{6}\\ t=5\end{cases},t\in\mathbb{R}\ .$$

Or, $1\neq\frac{1}{6}$ donc A(1;2;7) n'apaprtient pas à (D).

(b) $\overrightarrow{AB}(2;-3;-1)$ est directeur de (AB).
$\vec{u}(-4;6;2)$ est directeur de (D).

On a $\overrightarrow{AB}=-2\vec{u}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (D) sont parallèles.

4. (a) $\overrightarrow{AB}(2;-3;-1);\overrightarrow{AC}(-1;-2;1)$ et $\overrightarrow{AD}(-2;-2;3)$.
Soit $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

$$a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a-b-2c=0\\ -a-2b-2c=0\\ b+3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\times4c-(-3c)-2c=0\\ a=-2\times(-3c)-2c=4c\\ b=-3c\end{cases}$$

$$a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-8c+3c-2c=0\\ a=4c\\ b=-3c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7c=0\\ a=4c\\ b=-3c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\ a=0\\ b=0\end{cases}$$

Conclusion : $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont trois vecteurs non coplanaires donc forment une base de l'espace.

(b) On cherche $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$ avec $\overrightarrow{AE}(-3;2;0)$.

$$a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a-b-2c=-3\\ -a-2b-2c=2\\ b+3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2(4c-2)-(-3c)-2c=-3\\ a=-2\times(-3c)-2c-2\\ b=-3c\end{cases}$$

$$a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}\Leftrightarrow\begin{cases}-8c+4+3c-2c=-3\\ a=-2\times(-3c)-2c-2\\ b=-3c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7c=-7\\ a=4c-2\\ b=-3c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1\\ a=2\\ b=-3\end{cases}$$

Conclusion : $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

Exercice 2

Les questions 1. & 2. ci-dessous sont indépendantes.

1. (a) $6x^2+x-1=0$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   $\Delta=1^2-4\times6\times(-1)=25=5^2>0$ donc l'équation admet deux racines réelles disstinctes

   $x_1=\frac{-1-5}{12}=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}$ et $x_1=\frac{-1+5}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

   Conclusion : $S=\{-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\}$.

   (b) $6(\ln(x))^2+\ln(x)-1=0$ est définie pour les réels $x>0$.

   $6(\ln(x))^2+\ln(x)-1=0\Leftrightarrow 6X^2+X-1=0$ avec $X=\ln(x)$

   $6(\ln(x))^2+\ln(x)-1=0\Leftrightarrow X=-\frac{1}{2}$ ou $X=\frac{1}{3}$ d'après le (a)

   $6(\ln(x))^2+\ln(x)-1=0\Leftrightarrow \ln(x)=-\frac{1}{2}$ ou $\ln(x)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$ ou $x=e^{\frac{1}{3}}$

   Conclusion : $S=\{e^{-\frac{1}{2}};e^{\frac{1}{3}}\}$.

   (c) $6e^{2x}+e^x-1=0$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   $6e^{2x}+e^x-1=0\Leftrightarrow 6(e^x)^2+e^x-1=0\Leftrightarrow 6X^2+X-1=0$ avec $X=e^x>0$

   $6e^{2x}+e^x-1=0\Leftrightarrow X=-\frac{1}{2}<0(\text{impossible})$ ou $X=\frac{1}{3}$ d'après le (a)

   $6e^{2x}+e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\ln(\frac{1}{3})=-\ln(3)$

   Conclusion : $S=\{-\ln(3)\}$.

2. $P(X\geqslant1)\geqslant0{,}995\Leftrightarrow 1-P(X=0)\geqslant0{,}995$

   $P(X\geqslant1)\geqslant0{,}995\Leftrightarrow -P(X=0)\geqslant-0{,}005$

   $P(X\geqslant1)\geqslant0{,}995\Leftrightarrow P(X=0)\leqslant0{,}005$

   $P(X\geqslant1)\geqslant0{,}995\Leftrightarrow 0{,}7^n\leqslant0{,}005$

   $P(X\geqslant1)\geqslant0{,}995\Leftrightarrow n\ln(0{,}7)\leqslant\ln(0{,}005)$

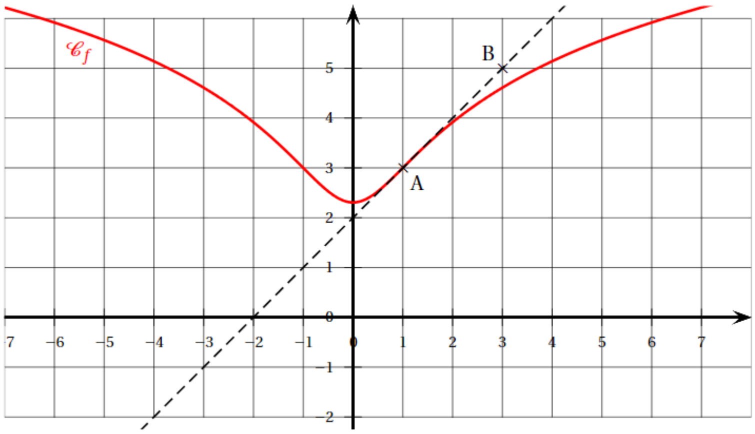
   $P(X\geqslant1)\geqslant0{,}995\Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln(0{,}005)}{\ln(0{,}7)}$

   Or, $\frac{\ln(0{,}005)}{\ln(0{,}7)}\approx14{,}85$

   Conclusion : $P(X\geqslant1)\geqslant0{,}995\Leftrightarrow n\geqslant15$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1;3) et B(3;5).
On donne ci-dessous C_f, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan, ainsi que la tangente (AB) à C_f au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. $f(1)=3$ et $f'(1)=1$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x)=\ln(ax^2+1)+b$ avec $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}, a>0$ et $b>0$.
   (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de la composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x\in\mathbb{R}, ax^2+b>0$ et d'une constante. $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{2ax}{(ax^2+1)^2}$.

   (b) $\begin{cases} f(1)=3 \\ f'(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(a\times 1^2+1)+b=3 \\ \dfrac{2a\times 1}{a\times 1^2+1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(a+1)+b=3 \\ \dfrac{2a}{a+1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-\ln(a+1) \\ 2a=a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-\ln(2) \\ a=1 \end{cases}$

   Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\ln(x^2+1)+3-\ln(2)$.

Partie B

1. $\forall x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)=\ln((-x)^2+1)+3-\ln(2)=\ln(x^2+1)+3-\ln(2)=f(x)$
   Conclusion : f est paire.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)+3-\ln(2)=+\infty$ comme somme de limites avec :

   $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)=+\infty$ par composition de limites
   $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\ln(2)=3-\ln(2)$

   Comme f est paire, on déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

3. (a) D'après la partie A, 2) a) , on déduit que $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ avec $a=1$.

   (b) $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+1>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x$ d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	3-ln(2)	↗	$+\infty$

   (c) f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$ donc f admet un minimum en $x=0$ qui vaut $f(0)=3-\ln(2)$.

4. f est dérivable sur $]-\infty;0]$ donc continue sur $]-\infty;0]$, strictement décroissante, à valeurs dans $[3-\ln(2);+\infty[$ donc pour tout réel $k>3-\ln(2)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unqiue solution α dans $]-\infty;0]$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
   Comme f est paire, il existe également un unique réel $\beta\in]-\infty;0]$ solution de l'équation $f(x)=k$.

   Conclusion : $\forall k>3-\ln(2)$, l'équation $f(x)=k$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

5. $f(x)=3+\ln(2)\Leftrightarrow \ln(x^2+1)+3-\ln(2)=3+\ln(2)$
   $f(x)=3+\ln(2)\Leftrightarrow \ln(x^2+1)=2\ln(2)=\ln(2^2)=\ln(4)$
   $f(x)=3+\ln(2)\Leftrightarrow x^2+1=4$
   $f(x)=3+\ln(2)\Leftrightarrow x^2=3$
   $f(x)=3+\ln(2)\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$

   Conclusion : $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+1)+3-\ln(2)$.

1. Par lecture graphique, il semble que f a deux points d'inflexion, l'un en $x=-1$ et l'autre en $x=1$.
2. $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   $$\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

3. (a) $\forall x\in\mathbb{R}, (x^2+1)^2>0$ donc le signe de $f''(x)$ dépend uniquement du signe de $2(1-x^2)=2(1-x)(1+x)$ d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$(1-x)$	+ + 0 -
$(1+x)$	- 0 + +
$(1-x)(1+x)$	- 0 + 0 -
$f''(x)$	- 0 + 0 -

Conclusion : Le plus grand intervalle sur lequel f est convexe est [-1;1].

(b) $(T): y=f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})$

avec $f'(\frac{1}{2})=\frac{2\times\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2+1}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$ et $f(\frac{1}{2})=\ln((\frac{1}{2})^2+1)+3-\ln(2)=\ln(\frac{5}{4})+3-\ln(2)$ d'où :

$(T): y=\frac{4}{5}(x-\frac{1}{2})+\ln(\frac{5}{4})+3-\ln(2)$

$(T): y=\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}+\ln(\frac{5}{4})+3-\ln(2)$

$(T): y=\frac{4}{5}x+\ln(\frac{5}{8})+\frac{13}{5}$

(c) f est convexe sur [-1;1] donc C_f est située au-dessus de toutes ses tangentes sur [-1;1] donc en particulier au-dessus de (T) d'où :

4. $\forall x\in\mathbb{R}, -1<x<1, \ln(x^2+1)+3-\ln(2)\geqslant\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}+\ln(\frac{4}{5})+3-\ln(2)$

$\forall x\in\mathbb{R}, -1<x<1, \ln(x^2+1)\geqslant\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}+\ln(\frac{4}{5})$