Chapitre 7 : Tableaux de signes et inéquations

I. Signe de ax+b sur $\mathbb{R}$

L'étude du signe de l'expression $ax+b$ a été traitée dans le chapitre sur les fonctions de référence. Un petit rappel, cependant, sur les deux résultats à connaître.

Propriété : Le signe de l'expression $ax+b$ avec $a\in\mathbb{R}, a\neq 0$ et $b\in\mathbb{R}$ dépend du signe de a

Cas où $a>0$	Cas où $a<0$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\quad -\frac{b}{a} \quad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$ax+b$</td><td>$-$ $\quad 0 \quad$ $+$</td></tr></table>	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\quad -\frac{b}{a} \quad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$ax+b$</td><td>$+$ $\quad 0 \quad$ -</td></tr></table>

Exercice 1 : Dresser le tableau de signes de $2x-5$ et de $-x-3$ sur $\mathbb{R}$.

II. Tableau de signes d'un produit ou d'un quotient

1. Tableau de signes d'un produit

Propriété: Règles des signes
Le produit (quotient) de deux facteurs (termes) non nuls de même signe est positif.
Le produit (quotient) de deux facteurs (termes) non nuls de signes contraires est négatif.

Méthode : pour déterminer le signe d'un produit (quotient) on détermine le signe de chaque facteur (terme) puis on dresse le tableau de signe du produit (quotient) en appliquant la règle des signes sus-mentionnée.

Exemple : Étude du signe de $(x+5)(2-3x)$ sur $\mathbb{R}$ selon les valeurs de x .

- Étape 1 : On cherche les valeurs de x pour lesquelles $x+5$ et $2-3x$ s'annulent :

$$x+5=0 \Leftrightarrow x=-5 \text{ et } 2-3x=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

- Étape 2 : on dresse les tableaux de signes de $x+5$ et $2-3x$ sur $\mathbb{R}$

  $x+5$ s'annule en $x=-5$ et le coefficient de x est 1 > 0 d'où le tableau de signes

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$x+5$		-	0	+	

  $2-3x$ s'annule en $x=\frac{2}{3}$ et le coefficient de x est -3 < 0 d'où le tableau de signes

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-3x$		+	0	-	

- Étape 3 : A l'aide de la règle des signes, on dresse le tableaux de signes de $(x+5)(2-3x)$ sur $\mathbb{R}$

  - Dans la ligne des x , on range les valeurs trouvées à l'étape 1, *dans l'ordre croissant*.
  - Dans la ligne de $x+5$, on met les signes comme dans le 1er tableau de l'étape 2.
  - Dans la ligne de $2-3x$, on met les signes comme dans le 2ème tableau de l'étape 2.
  - Dans la ligne de $(x+5)(2-3x)$, on applique la règle des signes pour le produit.

x	$-\infty$		-5		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(x+5)(2-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dans la pratique, on rédige de la façon suivante :

- $x+5$ s'annule en -5 et le coefficient de x est 1 > 0
- $2-3x$ s'annule en $\frac{2}{3}$ et le coefficient de x est -3 < 0

On déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-5		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(x+5)(2-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : $(x+5)(2-3x)\leqslant 0$ sur $]-\infty;-5[\,\cup\,]\frac{2}{3};+\infty[$ et $(x+5)(2-3x)\geqslant 0$ sur $[-5;\frac{2}{3}]$

Exercice 2 : Résoudre l'inéquation $(1-2x)(2x-5)\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 3 : Résoudre l'inéquation $(x-1)(x+2)>0$ sur $\mathbb{R}$

2. Tableau de signes d'un quotient

Propriété: Le quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$, avec $B(x)\neq 0$ est **du même signe** que le produit $A(x)\times B(x)$

Méthode : pour déterminer le signe d'un quotient, on détermine en priorité les valeurs interdites éventuelles c'est à dire les valeurs réelles pour lesquelles le dénominateur s'annule puis on détermine le signe de chaque terme et on dresse ensuite le tableau de signe du quotient en appliquant la règle des signes et en mettant une double barre verticale à l'endroit des valeurs interdites.

Exemple : Étude du signe de $\frac{2x+1}{x-1}$

- Étape 1 : On cherche les valeurs interdites du quotient c'est à dire les valeurs de x pour lesquelles $x-1$ s'annule.
  $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ donc 1 est une valeur interdite.
  On dit que le quotient $\frac{2x+1}{x-1}$ est défini ou calculable sur $\mathbb{R}-\{1\}$.
- Étape 2 : Le quotient $\frac{2x+1}{x-1}$ a même signe que le produit $(2x+1)(x-1)$ pour $x\neq 1$
  $2x+1$ s'annule en $\frac{-1}{2}$ et le signe de x est 2 > 0.
  $x-1$ s'annule en 1 et le signe de x est 1 > 0.

- Étape 3 : on déduit le tableau de signes suivant en appliquant la règle des signes et en n'oubliant pas la double barre en 1 (valeur interdite).

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vdots$	$-$	$\|\|$	$+$	
$\frac{2x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

La **double-barre en 1** indique que 1 est **valeur interdite**

Conclusion : $\frac{2x+1}{x-1} \leqslant 0 \text{ sur} [-\frac{1}{2};1[$ et $\frac{2x+1}{x-1} \geqslant 0 \text{ sur }]-\infty;-\frac{1}{2}] \cup]1;+\infty]$

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\frac{x-2}{2-5x} > 0$

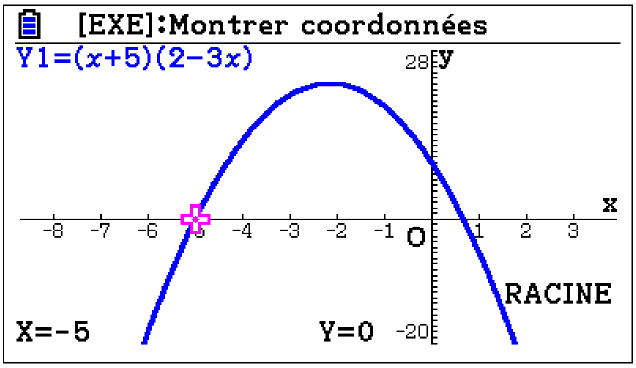
Exercice 5 : déterminer le signe de $\frac{x+1}{x-2} > 0$ sur $[0;+\infty[$.

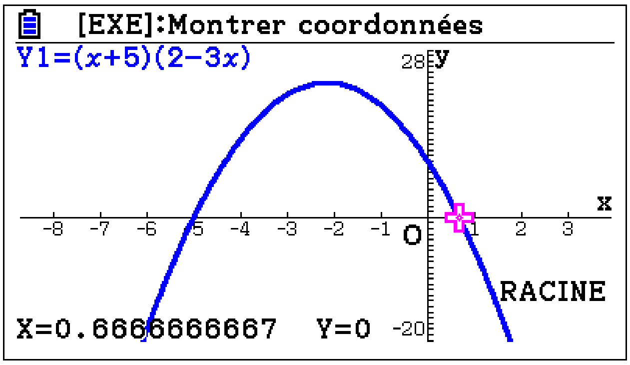
3. Utilisation de la calculatrice

La calculatrice permet de déterminer graphiquement le signe d'un produit ou d'un quotient de manière ou à défaut de vérifier ses résultats.
Pour cela, il suffit d'afficher la courbe du produit (quotient) et de la situer par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple : reprenons l'exemple du produit traité précédemment c'est à dire $(x+5)(2-3x)$.

Traçons la courbe de la fonction $f: x \rightarrow (x+5)(2-3x)$. La calculatrice affiche ceci :





On retrouve graphiquement le résultat obtenu par le tableau de signes, à savoir :

$$(x+5)(2-3x) \leqslant 0 \text{ sur }]-\infty;-5[\ \cup]\frac{2}{3};+\infty[\quad \text{et} \quad (x+5)(2-3x) \geqslant 0 \text{ sur } [-5;\frac{2}{3}]$$

III. Cas particulier x² < k avec k>0

Propriété: Soi k un réel strictement positif.

- $x^2=k \Leftrightarrow x=-\sqrt{k}$ ou $x\sqrt{k}$
- $x^2>k \Leftrightarrow x\in]-\infty;-\sqrt{k}[\ \cup]\sqrt{k};+\infty[$
- $x^2<k \Leftrightarrow x\in]-\sqrt{k};\sqrt{k}[$

Démonstration :
Soit k un réel strictement positif.
$\forall x\in\mathbb{R}, x^2-k=x^2-(\sqrt{k})^2=(x-\sqrt{k})(x+\sqrt{k})$. On déduit que :

- $x^2-k=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{k})=0$ ou $(x+\sqrt{k}) \Leftrightarrow x=\sqrt{k}$ ou $x=-\sqrt{k}$
- $x-\sqrt{k}>0 \Leftrightarrow x>\sqrt{k}$
- $x+\sqrt{k}>0 \Leftrightarrow x>-\sqrt{k}$

On déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{k}$		$\sqrt{k}$		$+\infty$
$x-\sqrt{k}$		-		-	0	+	
$x+\sqrt{k}$		-	0	+		+	
x^2-k		+	0	-	0	+	

Conclusion

- $x^2=k \Leftrightarrow x=-\sqrt{k}$ ou $x\sqrt{k}$
- $x^2>k \Leftrightarrow x\in]-\infty;-\sqrt{k}[\ \cup]\sqrt{k};+\infty[$
- $x^2<k \Leftrightarrow x\in]-\sqrt{k};\sqrt{k}[$

#

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2-13\leqslant 0$ puis $49-x^2\geqslant 0$