Sujet A

1) voir figure

2) • $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG}$ (Chasles) Or $\vec{BC} = \vec{AD}$ et $\vec{CG} = \vec{AE}$ car ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle

donc $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$

• $\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{BK} = \vec{AB} + \frac{5}{9}\vec{BF} = \vec{AB} + \frac{5}{9}\vec{AE}$ car $\vec{BF} = \vec{AE}$ (parallélépipède)

3) a) $\vec{IG} = \vec{IA} + \vec{AG} = -\frac{1}{6}\vec{AB} + \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = \frac{5}{6}\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$

donc $6\vec{IG} = 5\vec{AB} + 6\vec{AD} + 6\vec{AE}$

b) $\vec{JG} = \vec{JA} + \vec{AG} = -\frac{1}{4}\vec{AD} + \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD} + \vec{AE}$

donc $4\vec{JG} = 4\vec{AB} + 3\vec{AD} + 4\vec{AE}$

c) $\vec{KG} = \vec{KA} + \vec{AG} = \cancel{-\vec{AB}} - \frac{5}{9}\vec{AE} + \cancel{\vec{AB}} + \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{AD} + \frac{4}{9}\vec{AE}$

donc $9\vec{KG} = 9\vec{AD} + 4\vec{AE}$

4) a) On a $\begin{cases} 6\vec{IG} = 5\vec{AB} + 6\vec{AD} + 6\vec{AE} \\ 4\vec{JG} = 4\vec{AB} + 3\vec{AD} + 4\vec{AE} \\ 9\vec{KG} = 9\vec{AD} + 4\vec{AE} \end{cases}$ donc $\begin{cases} 24\vec{IG} = 20\vec{AB} + 24\vec{AD} + 24\vec{AE} \\ 20\vec{JG} = 20\vec{AB} + 15\vec{AD} + 20\vec{AE} \end{cases}$

donc $24\vec{IG} - 20\vec{JG} = 9\vec{AD} + 4\vec{AE}$

donc $24\vec{IG} - 20\vec{JG} = 9\vec{KG}$

b) $9\vec{KG} = 24\vec{IG} - 20\vec{JG}$ donc les vecteurs $\vec{KG}$, $\vec{IG}$ et $\vec{JG}$ sont coplanaires donc les points I, J, G et K sont coplanaires

5) Les points I, J, G et K sont coplanaires donc les droites (IK) et (GJ) sont coplanaires. Elles sont donc soit sécantes, soit parallèles.

On a $\vec{IK} = \vec{IA} + \vec{AK} = -\frac{1}{6}\vec{AB} + \vec{AB} + \frac{5}{9}\vec{AE} = \frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{5}{9}\vec{AE}$

et $\vec{GJ} = \vec{GA} + \vec{AJ} = -\vec{AB} - \vec{AD} - \vec{AE} + \frac{1}{4}\vec{AD} = -\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AD} - \vec{AE}$

Dans la base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a $\vec{IK}\left(\frac{5}{6} ; 0 ; \frac{5}{9}\right)$ et $\vec{GJ}\left(-1 ; -\frac{3}{4} ; -1\right)$

or $\frac{\frac{5}{6}}{-1} = -\frac{5}{6}$ et $\frac{0}{-\frac{3}{4}} = 0$ donc $\vec{IK}$ et $\vec{GJ}$ ne sont pas colinéaires donc on déduit que (IK) et (GJ) ne sont pas parallèles.

Sujet B

1) $\vec{u}(a;b;c) \longrightarrow \vec{v_1}(a;b;-c) \longrightarrow \vec{v_2}(-a;b;-c)$

$\downarrow$

$\vec{v_3}(-a;-b;-c)$

Le vecteur directeur du rayon réfléchi par les 3 plans successivement est $\vec{v_3}(-a;-b;-c) = -\vec{u}$ donc les rayons initiaux et ~~…~~ réfléchis ont des directions parallèles.

2) a) $(d_2)\ \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) Soit $M \in (O;\vec{j},\vec{k})$. On a nécessairement $x_M = 0$.

c) $I_2(x;y;z) \in (d_2) \cap (O;\vec{j},\vec{k}) \iff \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 3-t \\ z = t \\ x = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 0 = 2-2t \\ y = 3-t \\ z = t \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ y = 3-1 = 2 \\ z = 1 \\ x = 0 \end{cases} \iff I_2(0;2;1)$

3) $(d_3) : \begin{cases} x = 0 + 2t' \\ y = 2 - t' \\ z = 1 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$

$I_3(x;y;z) \in (d_3) \cap (O;\vec{i},\vec{k}) \iff \begin{cases} x = 2t' \\ y = 2-t' \\ z = 1+t' \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t' \\ 0 = 2-t' \\ z = 1+t' \\ y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 2\times 2 = 4 \\ t' = 2 \\ z = 1+2 = 3 \\ y = 0 \end{cases} \iff I_3(4;0;3)$

4) a) $\vec{v_1}(-2;-1;-1)$ est directeur de (d_1)

$\vec{v_2}(-2;-1;1)$ est directeur de (d_2)

$\vec{v_3}(2;-1;1)$ est directeur de (d_3)

Supposons qu'il existe $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ tels que $a\vec{v_1}+b\vec{v_2}+c\vec{v_3}=\vec{0}$

$$\iff \begin{cases} -2a-2b+2c=0 \\ -a-b-c=0 \\ -a+b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a-b+c=0 & (1) \\ a+b+c=0 & (2) \\ -a+b+c=0 & (3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2c=0 & (1)+(2) \\ a+b+c=0 & (2) \\ -a+b+c=0 & (3) \end{cases} \iff \begin{cases} c=0 & (1') \\ a+b=0 & (2') \\ -a+b=0 & (3') \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=0 & (1') \\ a+b=0 & (2') \\ 2b=0 & (2')+(3') \end{cases} \iff \begin{cases} c=0 \\ a=-b=0 \\ b=0 \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> Le seul triplet $(a;b;c)$ tel que $a\vec{v_1}+b\vec{v_2}+c\vec{v_3}=\vec{0}$ est $(0;0;0)$ donc $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ ne sont pas coplanaires donc les droites (d_1), (d_2) et (d_3) ne sont pas coplanaires.

b) d_1 et d_4 sont parallèles donc $\vec{v_1}$ est directeur de d_4.

On a $\vec{v_1}(-2;-1;-1)$ directeur de (d_1)

$\vec{v_2}(-2;-1;1)$ directeur de (d_2)

$\vec{v_1}(-2;-1;-1)$ directeur de (d_4)

- (d_1) et (d_4) sont strictement parallèles car $I_3(4;0;3)\notin d_1$ et $I_3\in d_4$.
- $\vec{v_2}$ n'est pas colinéaire à $\vec{v_1}$ donc (d_2) n'est pas parallèle au plan contenant (d_1) et (d_4) et I_2 n'appartient pas au plan contenant (d_1) et (d_4) donc (d_1), (d_2) et (d_4) ne sont pas coplanaires.

Sujet C

a) $\vec{AB}(2;-2;-2)$ et $\vec{AC}(-2;-2;-2)$

donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires $\left(\frac{-2}{2}=-1 \text{ et } \frac{-2}{-2}=1\right)$

donc A, B et C ne sont pas alignés

Réponse : FAUX

b) A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

$\vec{AB}(2;-2;-2)$ $\vec{AC}(-2;-2;-2)$ $\vec{AD}(1;-1;-4)$

On suppose qu'il existe $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\vec{AB}+b\vec{AC}+c\vec{AD}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b+c=0 \\ -2a-2b-c=0 \\ -2a-2b-4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b+c=0 & (1) \\ -2a-2b-c=0 & (2) \\ a+b+2c=0 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b+c=0 & (1) \\ -4b=0 & (1)+(2) \\ a+b+2c=0 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+c=0 \\ b=0 \\ a+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2a \\ b=0 \\ a-4a=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=-2a \\ b=0 \\ -3a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases}$$

donc $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas coplanaires

donc A, B, C et D ne sont pas coplanaires

donc (AB) et (CD) ne sont pas sécantes

Réponse : FAUX

c) $\vec{EF}(0;-4;-6)$

Supposons qu'il existe $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\vec{AB}+b\vec{AC}+c\vec{EF}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b=0 \\ -2a-2b-4c=0 \\ -2a-2b-6c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ -a-b-2c=0 \\ -a-b-3c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ -2a-2c=0 \\ -2a-3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+c=0 \\ 2a+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=-a \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0 \\ c=0 \end{cases}$$

donc $\vec{EF}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ ne sont pas coplanaires donc (EF) n'est pas parallèle au plan (ABC) donc (EF) est sécante au plan (ABC)

Réponse : FAUX

1/1

Sujet D

1) $\vec{AB}(2;0;0)$ donc (AB) est parallèle à l'axe des abscisses car $\vec{AB}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires. On a $\vec{AB} = 2\vec{i}$.

2) $\vec{CD}(0;4;3)$ donc $\vec{CD} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ donc (CD) est parallèle au plan $(O;\vec{j},\vec{k})$. Or C appartient à $\mathcal{P}$ donc (CD) étant parallèle à $\mathcal{P}$ est nécessairement incluse dans $\mathcal{P}$.

3) (AB) est parallèle à (Ox) car $\vec{AB} = 2\vec{i}$.
Or une base de $\mathcal{P}$ est $(\vec{j},\vec{k})$ donc (AB) ne peut pas être parallèle à $(\mathcal{P})$ donc (AB) et $\mathcal{P}$ sont sécantes.

4) a) $E(11;-1;5)$ et $\vec{CE}(0;-1;4)$ donc $\vec{CE} = -\vec{j} + 4\vec{k}$

b) • $\vec{CE} = -\vec{j} + 4\vec{k}$ donc $(\vec{CE},\vec{j},\vec{k})$ sont coplanaires donc E appartient à $(\mathcal{P})$.

• On a $\vec{AE}(11;0;0)$ donc $\vec{AE} = 11\vec{i}$ donc $\vec{AE}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires donc E appartient à (AB)

<u>Conclusion</u>: E appartient à $(\mathcal{P})$ et à (AB) donc E est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec (AB).

5) (AB) coupe $(\mathcal{P})$ en E.
(CD) est incluse dans $(\mathcal{P})$ donc si (AB) et (CD) sont sécantes alors nécessairement leur point d'intersection est E.
Reste à vérifier que E appartient à (CD).
On a $\vec{CE}(0;-1;4)$ et $\vec{CD}(0;4;3)$.
Or $\frac{-1}{4} \neq \frac{4}{3}$ donc $\vec{CE}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas colinéaires donc E, C et D ne sont pas alignés donc E n'appartient pas à (CD).
<u>Conclusion</u>: (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

Sujet E

1) ABCDEFGH est un cube donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires donc $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ est une base de l'espace.

2) a) $\vec{CE} = \underbrace{\vec{CA} + \vec{AE}}_{\text{Chasles}} = \underbrace{\vec{CB} + \vec{CD}}_{\text{règle du parallélogramme}} + \vec{AE} = \underbrace{-\vec{AD} - \vec{AB}}_{} + \vec{AE} = -\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AE}$

$\vec{CB} = -\vec{AD}$ et $\vec{CD} = -\vec{AB}$ car ABCD est un carré

b) $\vec{CL} = \frac{2}{3}\vec{CE}$ donc $\vec{CA} + \vec{AL} = \frac{2}{3}\vec{CE}$ donc $\vec{AL} = -\vec{CA} + \frac{2}{3}\vec{CE} = \vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{CE}$

donc $\vec{AL} = \vec{AC} - \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AE} = \underbrace{\vec{AB} + \vec{AD}}_{\text{règle du parallélogramme}} - \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AE}$

donc $\vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AE}$

3) On a $\vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AE}$

$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AE}$

$\vec{AH} = \vec{AD} + \vec{AE}$

donc $\frac{1}{3}\vec{AF} + \frac{1}{3}\vec{AH} = \vec{AL}$ donc $\vec{AF}$, $\vec{AH}$ et $\vec{AL}$ sont coplanaires

4) On a $\vec{AK} = \vec{AE} + \vec{EK} = \vec{AE} + \frac{1}{2}(\vec{EF} + \vec{EH}) = \vec{AE} + \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})$

donc $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE}$

et $\vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AE}$

donc $\frac{3}{2}\vec{AL} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\vec{AE}$

donc $\frac{3}{2}\vec{AL} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE} = \vec{AK}$

donc A, L et K sont alignés.

Sujet F

1) $S_1(t) : \begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}$

a) Les coordonnées du sous-marin au début de l'observation sont :

$S_1(0) : \begin{cases} x(0) = 140 \\ y(0) = 105 \\ z(0) = -170 \end{cases}$ c'est à dire $S_1(0)\ (140 ; 105 ; -170)$

b) Le vecteur vitesse de ce sous-marin est $x'(t)\ (-60 ; -90 ; -30)$

c) La durée nécessaire au sous-marin pour se rendre de la surface au point $S_1(0)$ est égale à t telle que $z(-t) = 0$

$z(-t) = 0 \iff -170 + 30t = 0 \iff t = \frac{170}{30} = \frac{17}{3}$ min

$t = \left(5 + \frac{2}{3}\right)$ min $= 5$ min $+ \frac{2}{3} \times 6 = 5$ min 40 s.

2) $S_2(0)\ (68 ; 135 ; -68)$.

$S_2(3)\ (-202 ; -405 ; -248)$

On a $\overrightarrow{S_2(0)S_2(3)}\ (-270 ; -540 ; -180)$

donc le vecteur vitesse constant est $\vec{v}(-90 ; -180 ; -60)$

(On divise chaque coordonnée par 3 car le sous-marin a parcouru la distance $S_2(0)S_2(3)$ en 3 minutes).

On déduit que $S_2(t) : \begin{cases} x(t) = \quad - 90t \\ y(t) = 135 - 180t \\ z(t) = -68 - 60t \end{cases}$ avec $S_2(0) \in S_2(t)$

3) a) $S_1(t)\begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}$ $S_2(t) : \begin{cases} x(t') = 68 - 90t' \\ y(t') = 135 - 180t' \\ z(t') = -68 - 60t' \end{cases}$

On a $-170 - 30t = -68 - 60t \iff 30t = 102 \iff t = \frac{102}{30} = 3,4$

donc $t = 3\text{ min} + 0,4\text{ min} = 3\text{ min }24\text{ s}$ $(0,4 \times 60 = 24\text{ s})$.

b) • $\vec{u}(-60 ; -90 ; -30)$ est directeur de $S_1(t)$

$\vec{v}(-90 ; -180 ; -60)$ est directeur de $S_2(t)$

Or $\frac{-90}{-60} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5$ et $\frac{-180}{-90} = 2 \neq 1,5$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les trajectoires des sous-marins ne sont pas parallèles.

• Cherchons si possible $(t,$ tel que $S_1(t) = S_2(t')$.

$S_1(t) = S_2(t') \iff \begin{cases} 140 - 60t = 68 - 90t' \\ 105 - 90t = 135 - 180t' \\ -170 - 30t = -68 - 60t' \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 90t' = \cancel{68} - 140 + 60t = -72 + 60t \\ 105 - 90t = 135 - 180t' \\ -170 - 30t = -68 - 60t' \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t' = -0,8 + \frac{2}{3}t \\ 105 - 90t = 135 + 144 - 120t \\ -170 - 30t = -68 + 48 - 40t \end{cases} \iff \begin{cases} t' = -0,8 + \frac{2}{3}t \\ 30t = 174 \\ 10t = 150 \end{cases}$

2/2

$\iff \begin{cases} t' = -0,8 + \frac{2}{3}t \\ t = 5,8 \\ t = 15 \end{cases}$ Impossible

Conclusion : les trajectoires ne sont pas sécantes non plus.
On en déduit qu'elles sont non coplanaires.