Exercice 57 p246

1) $\ln(5x+1) = \ln(x)$ est définie pour les réels x tels que $\begin{cases} 5x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} x > -\frac{1}{5} \\ x > 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $x > 0$.

Soit $x > 0$.

$\ln(5x+1) = \ln(x) \Leftrightarrow 5x+1 = x \Leftrightarrow 4x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} < 0$

Conclusion : $S = \emptyset$

2) $3\ln(x) + 2 = 5$ est définie pour $x > 0$.

Soit $x > 0$,

$3\ln(x) + 2 = 5 \Leftrightarrow 3\ln(x) = 3 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e > 0$

Conclusion : $S = \{e\}$

3) $e^{2x-5} = e = e^1 \Leftrightarrow 2x - 5 = 1 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

Conclusion : $S = \{3\}$

4) $4e^x - 3 = 9 \Leftrightarrow e^x = \frac{12}{4} = 3 \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3) \Leftrightarrow x = \ln(3)$

Conclusion : $S = \{\ln(3)\}$

Exercice 58 p 246

1) $3\ln(x) < 12$ est définie pour $x > 0$.

Soit $x > 0$.

$3\ln(x) < 12 \iff \ln(x) < 4$ et $x > 0 \iff e^{\ln(x)} < e^4$ et $x > 0$

$\iff x < e^4$ et $x > 0 \iff 0 < x < e^4$

Conclusion : $S =]0 ; e^4[$

2) $6 - 3\ln(x) \geqslant -3$ est définie pour $x > 0$

Soit $x > 0$.

$6 - 3\ln(x) \geqslant -3 \iff -3\ln(x) \geqslant -9 \iff \ln(x) \leq 3$

$\iff e^{\ln(x)} \leq e^3 \iff x \leq e^3$

Conclusion : $S =]0 ; e^3]$

3) $e^{x-4} > 3 \iff \ln(e^{x-4}) > \ln(3) \iff x - 4 > \ln(3)$

$\iff x > 4 + \ln(3)$

Conclusion : $S =]4 + \ln(3) ; +\infty[$

4) $4 - 2e^{x-4} > 0 \iff 4 > 2e^{x-4} \iff 2 > e^{x-4} \iff e^{x-4} < 2$

$\iff \ln(e^{x-4}) < \ln(2) \iff x - 4 < \ln(2) \iff x < 4 + \ln(2)$

$S =]-\infty ; 4 + \ln(2)[$

Exercice 59 p 246

(E) : $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

(E) est définie pour les réels x tels que $\begin{cases} -3x > 0 \\ x^2-4 > 0 \end{cases}$ c'est-à-dire

$\begin{cases} x < 0 \\ x < -2 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$ c'est-à-dire pour $x < -2$

Soit $x < -2$, on a :

$\ln(-3x) = \ln(x^2-4) \iff -3x = x^2-4 \iff x^2+3x-4=0$

$\iff (x-1)(x+4)=0 \iff x = 1 > -2$ ou $x = -4 < -2$

Conclusion : $S = \{-4\}$

Exercice n°60 p 246

(I) : $\ln(x^2-49) > 0$

(I) est définie pour les réels x, tels que, $x^2-49>0$ c'est-à-dire pour $x < -7$ ou $x > 7$.

$\ln(x^2-49) > 0 \iff x^2-49 > 1 \iff x^2-50 > 0$

$\iff x < -\sqrt{50}$ ou $x > \sqrt{50}$. Or $-\sqrt{50} < -7$ et $\sqrt{50} > 7$

Conclusion : $S =]-\infty ; -\sqrt{50}[\cup]\sqrt{50} ; +\infty[$

Exercice n° 68 p 246

$f(x) = x^2 - 2x - 15$

1) $x_1 = -3$ est racine évidente de $P(x)$ donc la 2^{nde} racine x_2 vérifie

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ donc $-3 \times x_2 = \frac{-15}{1}$ donc $x_2 = \frac{-15}{-3} = 5$.

On déduit que $P(x) = 0$ admet deux solutions : -3 et 5. $S = \{-3; 5\}$

Or $a = 1 > 0$ (coefficient des x^2) donc l'inéquation $P(x) < 0$

a pour solution : $S =]-3; 5[$.

2) Soit (E) : $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 15 = 0$ définie pour $x > 0$

On pose $X = \ln(x)$. avec $x > 0$.

$(E) \Leftrightarrow X^2 - 2X - 15 = 0$ avec $X = \ln(x)$

$\Leftrightarrow X = -3$ ou $X = 5$

$\Leftrightarrow \ln(x) = -3$ ou $\ln(x) = 5$

$\Leftrightarrow x = e^{-3} > 0$ ou $x = e^5 > 0$

Conclusion : $S = \{e^{-3}; e^5\}$

3) (F) $e^{2x} - 2e^x - 15 < 0$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$.

$(F) \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 15 < 0$

$\Leftrightarrow X^2 - 2X - 15 < 0$ en posant $X = e^x$

$\Leftrightarrow -3 < X < 5$ d'après le 1) avec $X = e^x$

$\Leftrightarrow -3 < e^x < 5$

$\Leftrightarrow 0 < e^x < 5$ car $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

$\Leftrightarrow x < \ln(5)$ car $x \mapsto \ln(x)$ strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Conclusion : $S =]-\infty; \ln(5)[$

Exercice 69 p 246

1) (E) : $(\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 3$ est définie pour $x > 0$.

On pose $X = \ln(x)$

(E) : $\Leftrightarrow X^2 + 2X = 3$ avec $X = \ln(x)$

$\Leftrightarrow X^2 + 2X - 3 = 0$ avec $X = \ln(x)$

$\Leftrightarrow X = 1$ ou $X = -3$ (racines évidentes) avec $X = \ln(x)$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 1$ ou $\ln(x) = -3$

$\Leftrightarrow x = e > 0$ ou $x = e^{-3} > 0$

Conclusion : $\mathcal{S} = \{e ; e^{-3}\}$

Exercice n° 71 p 246

$f : [0,1 ; 20] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = 95,14 - 8\ln(x)$

1) a) $f(3) = 95,14 - 8 \times \ln(3) \simeq 86,35 < 90$ donc l'ouvrier n'est pas obligé de se protéger du bruit.

b) On cherche $x \in [0,1 ; 20]$ tel que $f(x) < 90$

$f(x) < 90 \iff 95,14 - 8\ln(x) < 90$ et $0,1 \leq x \leq 20$

$\iff \ln(x) > \dfrac{90 - 95,14}{-8}$ et $0,1 \leq x \leq 20$

$\iff \ln(x) > 0,6425$ et $0,1 \leq x \leq 20$

$\iff x > e^{0,6425} \simeq 1,91$ et $0,1 \leq x \leq 20$

Conclusion : l'ouvrier doit se protéger dès que sa distance à la machine est inférieur ou égale à 1,91 m environ.

2) a) La 1re fonction permet de calculer l'image $f(x)$.

b) niveau() renvoie $x = 2$

c) Dans le contexte de l'exercice, $x = 2$ représente la distance en mètre (à 0,1 près) à partir de laquelle l'ouvrier doit se protéger.

Exercice n° 103 p 249

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{3}{2^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_n)$.

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ donc $v_n = \ln(u_n)$ existe
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2^n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2^n}\right)$$

$$v_{n+1} = -\ln(2) + \ln(u_n) = -\ln(2) + v_n$$

donc (v_n) est arithmétique de raison $r = -\ln(2)$

Exercice 117 p 250

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-6} \iff \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) < \ln\left(10^{-6}\right)$ car $x \mapsto \ln x$ strict $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$

$\iff n \ln\left(\frac{1}{3}\right) < -6 \ln 10$

$\iff -n \ln 3 < -6 \ln 10$

$\iff n \ln 3 > 6 \ln 10$

$\iff n > \dfrac{6 \ln 10}{\ln 3} \simeq 12,57$

$\iff n \geqslant 13$

2) $(1,15)^n \geqslant 2 \times 10^3 \iff \ln\left((1,15)^n\right) \geqslant \ln\left(2 \times 10^3\right)$ car $x \mapsto \ln x$ strict $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$

$\iff n \ln(1,15) \geqslant \ln(2000)$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln(2000)}{\ln(1,15)} \simeq 54,38$

$\iff n \geqslant 55$

Exercice 118 p 250

1) Soit u_n le nombre de moteurs à l'année $2019+n$, en millions.

On a $u_0 = 3,5$ et $u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{2}{100}\right) = 0,98\, u_n$ $n \geqslant 0$.

(u_n) est géométrique de raison $q = 0,98$ et de 1er terme $u_0 = 3,5$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 3,5 \times 0,98^n$

$u_n \leq 3 \iff 3,5 \times 0,98^n \leq 3$

$\iff 0,98^n \leq \dfrac{3}{3,5}$

$\iff \ln\left(0,98^n\right) \leq \ln\left(\dfrac{3}{3,5}\right)$ car $x \mapsto \ln x$ strict $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$

$\iff n \ln(0,98) \leq \ln 3 - \ln 3,5$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 3 - \ln 3,5}{\ln(0,98)}$ car $\ln(0,98) < 0$ avec $0,98 \in]0;1[$

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant 7,63$ et $n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant 8$

A partir de $2019+8 = 2027$, le parc d'attraction recevra moins de 3 millions de visiteurs.

2) Soit v_n le nombre de visiteurs à l'année $2019+n$, en millions.

On a $v_0 = 1,7$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)$

$v_{n+1} = v_n \times 1,025$

donc (v_n) est géométrique de raison $q = 1,025$ et de 1er terme $v_0 = 1,7$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 1,7 \times 1,025^n$

$v_n \geqslant 2,2 \quad \Leftrightarrow \quad 1,7 \times 1,025^n \geqslant 2,2 \quad \Leftrightarrow \quad 1,025^n \geqslant \frac{2,2}{1,7}$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left((1,025)^n\right) \geqslant \ln\left(\frac{2,2}{1,7}\right)$ car $x \mapsto \ln x$ strict $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad n \ln(1,025) \geqslant \ln 2,2 - \ln 1,7$

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \dfrac{\ln 2,2 - \ln 1,7}{\ln 1,025} \simeq 10,44$

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant 11$

A partir de $2019+n = 2030$, le parc d'attraction recevra plus de 2,2 millions de visiteurs.

3) On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $\quad 1,7 \times 1,025^n \geqslant 3,5 \times 0,98^n$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1,025^n}{0,98^n} \geqslant \dfrac{3,5}{1,7}$

$\Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{1,025}{0,98}\right)^n \geqslant \dfrac{3,5}{1,7}$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\left(\dfrac{1,0,25}{0,98}\right)^n\right) \geqslant \ln\left(\dfrac{3,5}{1,7}\right)$ car $x \mapsto \ln x$ strict $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$

2/3

$$\Leftrightarrow \quad n \times \ln\left(\frac{1{,}025}{0{,}98}\right) \geqslant \ln\left(\frac{3{,}5}{1{,}7}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{3{,}5}{1{,}7}\right)}{\ln\left(\frac{1{,}025}{0{,}98}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln 3{,}5 - \ln 1{,}7}{\ln 1{,}025 - \ln 0{,}98} \simeq 16{,}08$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geqslant 17$$

A partir de $2019 + 17 = 2036$, le 2nd parc d'attraction recevra plus de visiteurs que le 1er parc d'attraction.

Exercice n° 119 p 250

1)

```
def seuil():
    n = 0
    while 1,08^n < 10^4
        n = n + 1
    return(n)
```

2) $1{,}08^n \geqslant 10^4$

$$\Leftrightarrow \ln(1{,}08^n) \geqslant \ln(10^4) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow n \ln 1{,}08 \geqslant 4 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{4 \ln 10}{\ln 1{,}08} \simeq 119{,}67$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant 120$$

(*) car $x \mapsto \ln x$ strict $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$

3/3

Exercice 117 p 250

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-6} \iff \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) < \ln(10^{-6})$ car $x \mapsto \ln x$ strict $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$

$\iff n \ln\left(\frac{1}{3}\right) < -6 \ln 10$

$\iff -n \ln 3 < -6 \ln 10$

$\iff n \ln 3 > 6 \ln 10$

$\iff n > \frac{6 \ln 10}{\ln 3} \simeq 12,57$

$\iff n \geq 13$

2) $(1,15)^n \geq 2 \times 10^3 \iff \ln\left((1,15)^n\right) \geq \ln(2 \times 10^3)$ car $x \mapsto \ln x$ strict $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$

$\iff n \ln(1,15) \geq \ln(2000)$

$\iff n \geq \frac{\ln(2000)}{\ln(1,15)} \simeq 54,38$

$\iff n \geq 55$

Exercice 118 p 250

1) Soit u_n le nombre de moteurs à l'année $2019 + n$, en millions.

On a $u_0 = 3,5$ et $u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{2}{100}\right) = 0,98\, u_n \quad n \geq 0$.

(u_n) est géométrique de raison $q = 0,98$ et de 1er terme $u_0 = 3,5$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 3,5 \times 0,98^n$

$u_n \leq 3 \iff 3,5 \times 0,98^n \leq 3$

$\iff 0,98^n \leq \frac{3}{3,5}$

$\iff \ln(0,98^n) \leq \ln\left(\frac{3}{3,5}\right)$ car $x \mapsto \ln x$ strict $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$

$\iff n \ln(0,98) \leq \ln 3 - \ln 3,5$

$\iff n \geq \frac{\ln 3 - \ln 3,5}{\ln(0,98)}$ car $\ln(0,98) < 0$ avec $0,98 \in]0;1[$

1/3

$\iff \quad n \geqslant 7{,}63 \quad$ et $n \in \mathbb{N}$

$\iff \quad n \geqslant 8$

A partir de $2019 + 8 = 2027$, le parc d'attraction recevra moins de 3 millions de visiteurs.

2) Soit v_n le nombre de visiteurs à l'année $2019 + n$, en millions.

On a $v_0 = 1{,}7$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times \left(1 + \frac{2{,}5}{100}\right)$

$v_{n+1} = v_n \times 1{,}025$

donc (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}025$ et de 1er terme $v_0 = 1{,}7$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 1{,}7 \times 1{,}025^n$

$v_n \geqslant 2{,}2 \iff 1{,}7 \times 1{,}025^n \geqslant 2{,}2 \iff 1{,}025^n \geqslant \frac{2{,}2}{1{,}7}$

$\iff \ln\left((1{,}025)^n\right) \geqslant \ln\left(\frac{2{,}2}{1{,}7}\right)$ car $x \mapsto \ln x$ strict ↗ sur $]0;+\infty[$

$\iff n \ln(1{,}025) \geqslant \ln 2{,}2 - \ln 1{,}7$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 2{,}2 - \ln 1{,}7}{\ln 1{,}025} \simeq 10{,}44$

$\iff n \geqslant 11$

A partir de $2019 + 11 = 2030$, le parc d'attraction recevra plus de 2,2 millions de visiteurs.

3) On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $1{,}7 \times 1{,}025^n \geqslant 3{,}5 \times 0{,}98^n$

$\iff \dfrac{1{,}025^n}{0{,}98^n} \geqslant \dfrac{3{,}5}{1{,}7}$

$\iff \left(\dfrac{1{,}025}{0{,}98}\right)^n \geqslant \dfrac{3{,}5}{1{,}7}$

$\iff \ln\left(\left(\dfrac{1{,}025}{0{,}98}\right)^n\right) \geqslant \ln\left(\dfrac{3{,}5}{1{,}7}\right)$ car $x \mapsto \ln x$ strict ↗ sur $]0;+\infty[$

2/3

$$\Leftrightarrow \quad n \times \ln\left(\frac{1,025}{0,98}\right) \geqslant \ln\left(\frac{3,5}{1,7}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{3,5}{1,7}\right)}{\ln\left(\frac{1,025}{0,98}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln 3,5 - \ln 1,7}{\ln 1,025 - \ln 0,98} \simeq 16,08$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geqslant 17$$

A partir de $2019 + 17 = 2036$, le 2d parc d'attraction recevra plus de visiteurs que le 1er parc d'attraction.

Exercice n° 119 p 250

1)

```
def seuil():
    n = 0
    while 1,08^n < 10^4
        n = n + 1
    return (n)
```

2) $1,08^n \geqslant 10^4$

$\Leftrightarrow \ln(1,08^n) \geqslant \ln(10^4)$ (*)

$\Leftrightarrow n \ln 1,08 \geqslant 4 \ln 10$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{4 \ln 10}{\ln 1,08} \simeq 119,67$

$\Leftrightarrow n \geqslant 120$

(*) car $x \mapsto \ln x$ strict ↗ sur $]0 ; +\infty[$

3/3

Exercice n°138 p 251

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = \ln(1+e^x)$

1) a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1+e^x) = 0$ par composition de limites avec

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 1+e^x = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = \ln 1 = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^x) = +\infty$ par composition de limites avec

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc l'axe des abscisses d'équation $y=0$ est asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = 1+e^x > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0;+\infty[$ qui contient tout réel $m>0$.

On déduit que l'équation $f(x) = m$ avec $m>0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ d'après le corollaire du TVI

4) $T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

or $f'(0) = \dfrac{e^0}{1+e^0} = \dfrac{1}{2}$ et $f(0) = \ln(1+e^0) = \ln 2$

d'où $T_0 : y = \dfrac{1}{2}x + \ln 2$

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $g(x) = \ln(1+e^x) - x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} - 1 = \dfrac{e^x - 1 - e^x}{1+e^x} = \dfrac{-1}{1+e^x} < 0$

donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) - x = +\infty$ comme différence de limites avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ est une F.I du type $+\infty - \infty$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) - \ln e^x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1+e^x}{e^x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right) = 0$

Comme composée de limites avec :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(1+X) = \ln(1) = 0$

d'où le tableau de variations de g

x	$-\infty$		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	0

On déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$ donc $f(x) > x$ donc $\mathcal{C}_f$ est situé au dessus de $d : y = x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 123 p 250

$f :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{\ln(x)}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{3} - \frac{3}{\ln(x)} = +\infty$ comme somme de limites avec

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{3} = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{-3}{\ln(x)} = +\infty \quad \text{avec } \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \end{cases}$$

Remarque :

On déduit que C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{3} - \frac{3}{\ln(x)} = +\infty$ comme somme de limites avec :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{3} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3}{\ln(x)} = 0 \quad \text{avec } \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0 \end{cases}$$

Exercice 125 p 250

$h :]e ; +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto h(x) = \frac{2\ln(x) + 3}{\ln(x) - 1}$

1) $\lim\limits_{x \to e} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{2\ln(x) + 3}{\ln(x) - 1} = +\infty$ comme quotient de limites avec

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} \ln(e) = 1^+ \quad \text{donc } \lim\limits_{x \to e^+} 2\ln(x) + 3 = 5^+ \\ \qquad \text{et } \lim\limits_{x \to e^+} \ln(x) - 1 = 0^+ \end{cases}$$

On déduit que $(d) : x = e$ est asymptote verticale à C_f.

2) a) Soit $x > e$.

$$h(x) = \frac{2\ln(x)+3}{\ln(x)-1} = \frac{\cancel{\ln(x)}\left(2+\frac{3}{\ln(x)}\right)}{\cancel{\ln(x)}\left(1-\frac{1}{\ln(x)}\right)} = \frac{2+\frac{3}{\ln(x)}}{1-\frac{1}{\ln(x)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{\ln(x)}}{1-\frac{1}{\ln(x)}} = 2$$ comme quotient de limites avec :

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0 \quad \text{avec } \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \text{d'où } \lim_{x\to+\infty} 2+\frac{3}{\ln(x)} = 2 \quad \text{et } \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{\ln(x)} = 1 \end{cases}$$

On déduit que $(d) : y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

Exercice 132 p 251

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2 \ln(x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2 \ln(x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1+\frac{2}{x}}{x \ln(x)} = -\infty$

Comme quotient de limites avec :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} 1+\dfrac{2}{x} = +\infty \text{ avec } \lim\limits_{x \to \cancel{+\infty}\,0} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0^- \end{cases}$$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln(x)\right)$ est une F I du type $+\infty - \infty$

or $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}\left(1 + x\ln(x)\right) = +\infty$ comme produit de limites avec

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x \to 0^+} 1+x\ln(x) = 1 \end{cases}$$

Exercice n° 131 p 251

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln(\sqrt{x}) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2} x^2 \ln x = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0$ (limite usuelle)

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) = \lim\limits_{X \to 0^+} 2 X \ln(X) = 0$ car $\lim\limits_{X \to 0^+} X \ln(X) = 0$

Remarque : $\ln(x) = \ln\left(\sqrt{x}^2\right) = 2\ln(\sqrt{x})$

Exercice n° 136 p 251

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = \ln(x^2 + 3x + 4)$

Remarque : signe de $x^2 + 3x + 4$ sur $\mathbb{R}$
$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7 < 0$
donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3x + 4 > 0$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 4 > 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4}$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x + 3$ car $x^2 + 3x + 4 > 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 7 - \ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4\right)$
$= \ln\left(\frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{16}{4}\right) = \ln\left(\frac{7}{4}\right)$
$= \ln 7 - \ln 4$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 3x + 4) = +\infty$ comme composée de limites avec $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 3x + 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 + 3x + 4) = +\infty$ comme composée de limites avec (*)

(*) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 3x + 4 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = +\infty$; $\ln(X) = +\infty$

Exercice n° 141 p 251

$$f :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$$

1) a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1 + \ln x}{x^2} = -\infty$ comme quotient de limites avec

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2}$ est une FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = 0$ comme somme de limites avec :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} = 0$ comme produit de deux limites égales à 0. En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ donc $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

2) a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$.

$$\forall x>0,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times(1+\ln x)}{x^4} = \frac{x-2x-2x\ln x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x-2x\ln x}{x^4} = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

b) Soit $x>0$.

$$\begin{aligned} -1-2\ln x>0 &\iff -2\ln x > 1 \\ &\iff \ln x < -\frac{1}{2} \\ &\iff \ln x < \ln e^{-1/2} \\ &\iff x < e^{-1/2} \end{aligned}$$

car ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Or $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$ avec $x^3>0$ pour $x>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $-1-2\ln x$

c) On déduit le tableau de variations de f

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$e/2$	$\searrow$	0

$$f(e^{-1/2}) = \frac{1-\frac{1}{2}}{(e^{-1/2})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e^{-1}}$$

$$f(e^{-1/2}) = \frac{e}{2}$$

2/3

3) a) $\forall x > e^{-1/2}$, $f(x) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[e^{-1/2} ; +\infty[$.

. f est dérivable donc continue sur $]0 ; e^{-1/2}[$, strictement croissante, à valeurs dans $]-\infty ; \frac{e}{2}[$ avec $e/2 > 0$.
0 appartient à $]-\infty ; \frac{e}{2}[$. On déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution en α dans $]0 ; e^{-1/2}[$.

$$f(\alpha) = 0 \iff \frac{1 + \ln(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \iff 1 + \ln(\alpha) = 0$$
$$\iff \ln(\alpha) = -1$$
$$\iff \ln(\alpha) = \ln e^{-1}$$
$$\iff \alpha = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

~~Ce $f\left(\frac{1}{e}\right) =$~~

Conclusion : On déduit que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe (Ox) en un seul point $A\left(\frac{1}{e} ; 0\right)$.

b) A l'aide du tableau de variations de f, on déduit que :

$\forall x < \frac{1}{e}$, $f(x) < 0$

$\forall x \geq \frac{1}{e}$, $f(x) \geq 0$