Sujet A

1) $\ln(5) + \ln(x+1) = 1$ est défini pour les réels x tels que $x+1 > 0$ c'est à dire $x > -1$

$\ln(5) + \ln(x+1) = 1 \iff \ln\left(5(x+1)\right) = \ln e$ et $x > -1$

$\iff 5(x+1) = e$ et $x > -1$

$\iff x = \frac{e}{5} - 1 = \frac{e-5}{5}$ et $x > -1$

or $\frac{e-5}{5} \simeq -0,45 > -1$

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{e-5}{5} \right\}$ réponse : c

2) $f :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 2\ln(x) - x$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme différence de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{2}{x} - 1$ donc $f'(2) = \frac{2}{2} - 1 = 0$

réponse : b

3) $2^n > 175 \iff \ln 2^n > \ln 175 \iff n\ln 2 > \ln 175$

car $x \mapsto \ln x$ strict $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$

$\iff n > \frac{\ln 175}{\ln 2} \simeq 7,45$

donc $n \geq 8$ réponse : c

4) $g :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto g(x) = (x+1)\ln x$

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

$\forall x > 0,\ g'(x) = 1 \times \ln x + \frac{1}{x} \times (x+1) = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$ réponse : d

5) $f(x) = x^2 (1 - \ln x)$ pour $x \in]0;3]$

f est dérivable sur $]0;3]$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;3]$.

$\forall x \in]0;3]$, $f'(x) = 2x(1-\ln x) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = 2x - 2x\ln x - x$

$f'(x) = x - 2x\ln x = x(1 - 2\ln x)$

f' est dérivable sur $]0;3]$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;3]$

$\forall x \in]0;3]$, $f''(x) = 1 \times (1 - 2\ln x) + \left(-\frac{2}{x}\right) \times x = 1 - 2\ln x - 2$

$f''(x) = -2\ln x - 1$

Soit $x \in]0;3]$

$f''(x) = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{2} \iff x = e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,606$

$f''(x) \geq 0 \iff x \geq e^{-1/2}$ car $x \mapsto e^x$ strict ↑ sur $\mathbb{R}$

$f''(x) \leq 0 \iff x \leq e^{-1/2}$ 〃 〃

<u>Conclusion</u> :

f est convexe sur $]0; e^{-1/2}]$ et concave sur $[e^{-1/2}; 3]$

donc f est concave sur $[1;3]$ car $e^{-1/2} < 1$.

donc f' est décroissante sur $[1;3]$.

De plus, si $1 \leq x \leq 3$

$0 \leq \ln x \leq \ln 3$

$0 \leq 2\ln x \leq 2\ln 3$

$-2\ln 3 \leq -2\ln x \leq 0$

$1 - 2\ln 3 \leq 1 - 2\ln x \leq 1$

$\simeq -1,19 \leq 1 - 2\ln x \leq 1$

donc $f'(x)$ n'est pas de signe constant sur $[1;3]$

donc f n'est pas monotone sur $[1;3]$

conclusion : <u>réponse : C</u>

6) $T_e : y = f'(e)(x-e) + f(e)$

or $f'(e) = e(1 - 2\ln e) = -e$

$f(e) = e^2(1 - \ln e) = 0$

donc $T_e : y = -e(x-e) + 0$

$y = -ex + e^2$ réponse : c

7) D'après le 5), $f''(x)$ s'annule en changeant de signe uniquement en $x = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ donc f admet un unique point d'inflexion en $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ réponse : d

Sujet B

$$f : \left]0 ; +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

1) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln x)^2}{x} = +\infty$ comme quotient de limite avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{X \to -\infty} X^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty \text{ par composition de limite} \\ \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{array} \right.$$

$\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2) a) Soit $x > 0$, on a :

$$4 \times \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2 = 4 \times \frac{(\ln(\sqrt{x}))^2}{(\sqrt{x})^2} = 4 \times \frac{\left(\frac{1}{2} \ln(x)\right)^2}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \times \cancel{4} \times \cancel{\frac{1}{4}} \times (\ln x)^2 = \frac{(\ln x)^2}{x} = f(x)$$

b) On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 4 \times \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$

$$= \lim_{X \to +\infty} 4 \times \left(\frac{\ln X}{X} \right)^2 \text{ avec } X = \sqrt{x}$$

$$= 0 \text{ car } \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Soit $x>0$, on a :

$$f'(x) = \frac{2\times\frac{1}{x}\times \ln x \times x \;-\; 1\times(\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x\,(2-\ln x)}{x^2}$$

b) $\forall x>0$, $x^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)\,(2-\ln(x))$ sur $]0\,;+\infty[$

- $\ln x = 0 \iff x = 1$

  $\ln x > 0 \iff x > 1$

  $\ln x < 0 \iff x < 1$

$2-\ln x = 0 \iff \ln x = 2$
$\iff \ln x = \ln e^2$
$\iff x = e^2$

$2-\ln x > 0 \iff \ln x < 2$
$\iff \ln x < \ln e^2$
$\iff x < e^2$ car ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

$2-\ln x < 0 \iff x > e^2$

On déduit le tableau de signes de $f'(x)$ puis de variation de f

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

c) $f(1) = \frac{(\ln 1)^2}{1} = 0$

$f(e^2) = \frac{(\ln e^2)^2}{e^2} = \frac{4}{e^2}$

2/3

4) $\frac{4}{e^2} \simeq 0,54$

- On déduit, d'après le tableau de variations de f, que $\forall x > 1$, $f(x) \in [0; \frac{4}{e^2}]$ avec $\frac{4}{e^2} < 1$ donc l'équation $f(x) = 1$ n'a aucune solution dans $[1; +\infty[$.

- Par contre, f est dérivable donc continue sur $]0;1]$, strictement décroissante sur $]0;1]$, à valeurs dans $]0; +\infty[$ qui contient 1. On déduit que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $]0;1]$.

<u>Conclusion</u>: L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient $0,49 < \alpha < 0,50$

Sujet C

Partie A

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x - \ln(x^2+1)$$

1) $f(x) = x \iff x - \ln(x^2+1) = x$
$\iff -\ln(x^2+1) = 0$
$\iff \ln(x^2+1) = 0$
$\iff \ln(x^2+1) = \ln(1)$
$\iff x^2+1 = 1$
$\iff x^2 = 0$
$\iff x = 0$

$S = \{0\}$

2) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x - \ln(x^2+1) = -\infty$ comme différence de deux limites avec :

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2+1 = +\infty \end{cases}$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$ par composition de limites

• $f(x) = x - \ln(x^2+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $u(x) = x^2+1$ dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0$

donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Tous les éléments du tableau sont vérifiés ($\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ admise)

3) f est dérivable donc continue sur $[0;1]$, croissante sur $[0;1]$ telle que $f(0) = 0 - \ln(0^2+1) = -\ln(1) = 0$

$f(1) = 1 - \ln(1^2+1) = 1 - \ln 2 \simeq 0,306 < 1$

On déduit que $\forall x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$

4) a) Cette fonction détermine le plus petit entier naturel N tel que $f(N) \geqslant A$ avec A réel fixé au départ

b) valeur(100) retourne $N = 110$

Partie B

Soit $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2+1) \end{cases}$

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$ $(P(n))$.

Initialisation : au rang $n=0$, on a $u_0 = 1 \in [0;1]$ donc $P(0)$ est vraie :

Hypothèse de récurrence : On suppose $P(n)$ vraie

Hérédité : Selon $P(n)$, $u_n \in [0;1]$.

Or f est continue ~~croissante sur $[0;1]$~~ et $\forall x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$ donc $f(u_n) = u_{n+1} \in [0;1]$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée pour $n=0$, héréditaire, donc vraie pour tout entier naturel n, d'après le principe du raisonnement par récurrence.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1) \leq 0$ car :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 + 1 \geq 1$ donc $\ln(u_n^2+1) \geq \ln(1) = 0$ car $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc

$u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc (u_n) est decroissante

3) $(u_n)_n$ est décroissante et minorée (par 0) donc convergente d'après le théorème de la convergence monotone

4) Soit $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$.

Comme f est continue sur $[0;1]$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$

alors $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n)$ donc $l = f(l)$

$= f(\lim_{n \to +\infty} u_n)$

$l = f(l) \iff l = 0$ d'après Partie A 1).

<u>Conclusion :</u> $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

Sujet D

$f : [1;9] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln(x)$

1) f est dérivable sur $[1;9]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1;9]$.

$\forall x \in [1;9]$, $f'(x) = 0,5 \times 2x - 7 + 6 \times \frac{1}{x} = x - 7 + \frac{6}{x}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$$

2) a) $f'(x) = \frac{x^2-7x+6}{x}$ pour $x \in [1;9]$.

Or si $x \in [1;9]$, $x \geq 1 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de x^2-7x+6.
$x_1 = 1$ est racine évidente de $x^2 - 7x + 6$ donc la 2ème racine x_2 vérifie
$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ donc $x_2 = \frac{6}{1} = 6$.

On déduit que $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$. d'où le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[1;9]$ et les variations de f sur $[1;9]$.

x	1		6		9
x		+	+	+	
$x-1$	0	+	+	+	
$x-6$		−	0	+	
$f'(x)$		−	0	+	
f	7,5	↘	$\simeq 0,75$	↗	$\simeq 4,68$

$f(1) = 7,5$

$f(9) = -8,5 + 12\ln 3$

$f(9) \simeq 4,68$

$f(6) = -10 + 6\ln 6 \simeq 0,75$

b) . $\forall x \in [6;9]$, $f(x) \leq -8,5 + 12 \ln 3 \simeq 4,68$ donc l'équation $f(x) = 5$ n'admet pas de solutions sur l'intervalle $[6;9]$.

. f est dérivable donc continue sur $[1;6]$, strictement décroissante sur $[1;6]$, à valeurs dans $[-10+6\ln 6 \,;\, 7,5]$ qui contient 5 (car $-10+6\ln 6 \simeq 0,75$). On déduit que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α sur $[1;6]$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

c) A l'aide de la calculatrice, on a $\alpha \simeq 2,56$ arrondi au centième

d) L'algorithme permet de déterminer ~~la plus~~ une valeur de α à 10^{-2} près. On déduit que X contient la valeur 2,56 à la fin de l'algorithme.

3) f est décroissante sur $[1;6]$ puis croissante sur $[6;9]$ donc f admet un minimum en $x=6$ qui vaut $f(\alpha) = -10+6\ln 6 \simeq 0,75$.

On déduit que le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est minimal lorsque l'entreprise produit 600 pneus et vaut alors 75 €.

Sujet E

$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \dfrac{a + b\ln(x)}{x}$

1) a) $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$

car $B(1;2) \in \mathcal{C}_f$ car $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en $B(1;2)$

b) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$.

Soit $x > 0$. On a :

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = a + b\ln x$ et $v(x) = x$

$u'(x) = \dfrac{b}{x}$ $v'(x) = 1$

$f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ d'où $f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x} \times x - 1 \times (a + b\ln x)}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2} = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$

c) $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = a = 2 \end{cases}$

Conclusion : $f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x}$

2) a) $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{(2-2) - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{-2\ln x}{x^2}$

or $\begin{cases} x^2 > 0 \\ 2 > 0 \end{cases}$ donc $f'(x)$ est du signe de $-\ln x$.

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{2 + 2\ln x}{x} = -\infty$ comme quotient de limites avec :

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to 0^+} 2 + 2\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{cases}$

Remarque : L'axe des ordonnées est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + 2\,\frac{\ln x}{x} = 0$$ comme

somme de limites avec :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

<u>Remarque:</u> $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des abscisses pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

c) On déduit le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3) a) f est dérivable donc continue sur $]0;1]$, strictement croissante, à valeurs dans $]-\infty;2]$ qui contient 1. On déduit que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $]0;1]$ d'après le corollaire du TVI.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution β dans $]1;+\infty[$.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $5 < \beta < 6$

4) a) Les valeurs a et b retournées par la fonction def calcul() représente un encadrement $a < \alpha < b$ à 10^{-1} près de α.

On a $a < \alpha < b$

b) Il suffit de modifier la ligne 4 : $a = 5$ $b = 6$ pour obtenir un encadrement à 10^{-1} près de β.