Exercice :

On modélise le nombre de malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie, en fonction du nombre t de jours écoulés depuis l'apparition d'une maladie.
Cette modélisation est donnée par la fonction f définie sur [0;60] par $f(t)=t^2e^{-0,1t}$.
On note C_f sa courbe représentative.

1. Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle [0;60] puis démontrer que $f'(t)=te^{-0,1t}(2-0,1t)$.
2. (a) Étudier le signe de $f'(t)$ sur [0;60] .
   (b) Déterminer les variations de f sur [0;60].
   (c) Déterminer au bout de combien de jours, le nombre de malades est maximal puis préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là.
3. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle [0;60] , $f''(t)=(0,01t^2-0,4t+2)e^{-0,1t}$.
4. (a) Étudier la convexité de f définie sur [0;60].
   (b) Justifier que sur l'intervalle [0;15], la courbe représentative C_f de la fonction f admet un unique point d'inflexion.
   (c) Donner une interprétation, dans le contexte de l'exercice, de l'abscisse de ce point d'inflexion.
5. (a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse $t=10$.
   (b) Sans aucun calcul, justifier que $\forall t\in[6;34], t^2e^{-0,1t}\leqslant\frac{10}{e}t$.

Correction

1. La fonction $t \to -0{,}1t$ est linéaire donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On déduit qua la fonction composée $t \to e^{-0{,}1t}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   De plus, la fonction carré est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On déduit que la fonction $t \to t^2 e^{-0{,}1t}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est définie et dérivable sur [0;60].

   $$\forall t \in [0;60], f'(t)=2te^{-0{,}1t}+t^2\times(-0{,}1)e^{-0{,}1t}=te^{-0{,}1t}(2-0{,}1t)$$

2. (a) $\forall X \in \mathbb{R}, e^X>0$ donc $f'(t)$ est du signe de $t(2-0{,}1t)$ sur [0;60]. On déduit :
   $f'(t)=0 \Leftrightarrow t(2-0{,}1t)=0 \Leftrightarrow t=0 \text{ ou } t=\dfrac{2}{0{,}1}=20$ et $f'(t)>0 \Leftrightarrow 0<t<20$.

   (b) f est donc croissante sur [0;20] puis décroissante sur [20;60].

   (c) f est croissante sur [0;20] puis décroissante sur [20;60] donc f admet un maximum en $x=20$ qui vaut $f(20)=20^2\times e^{-0{,}1\times 20}=400e^{-2}\approx 54{,}134$.

   On déduit que le nombre de malades est maximal au bout de 20 jours et vaut environ 54134 environ.

3. f' est dérivable sur [0;60] comme somme de produits de fonctions dérivables sur [0;60].
   Soit $t \in [0;60]$. On a :
   $f''(t)=2e^{-0{,}1t}+2t\times(-0{,}1)e^{-0{,}1t}-0{,}1\times 2te^{-0{,}1t}+t^2\times(-0{,}1)^2e^{-0{,}1t}$
   $f''(t)=2e^{-0{,}1t}-0{,}2te^{-0{,}1t}-0{,}2te^{-0{,}1t}+0{,}01t^2e^{-0{,}1t}$
   $f''(t)=2e^{-0{,}1t}-0{,}4te^{-0{,}1t}+0{,}01t^2e^{-0{,}1t}$
   $f''(t)=(0{,}01t^2-0{,}4t+2)e^{-0{,}1t}$

4. (a) $\forall X \in \mathbb{R}, e^X>0$ donc $f''(t)$ est du signe de $0{,}01t^2-0{,}4t+2$ sur [0;60].
   Étude du signe de $0{,}01t^2-0{,}4t+2$ sur $\mathbb{R}$.
   $\Delta=(-0{,}4)^2-4\times 0{,}01\times 2=0{,}16-0{,}08=0{,}08>0$ donc le polynôme du 2nd degré $0{,}01t^2-0{,}4t+2$ admet deux racines réelles distinctes sur $\mathbb{R}$.

   $$t_1=\frac{0{,}4-\sqrt{0{,}08}}{0{,}02}=20-10\sqrt{2}\approx 5{,}85 \text{ et } t_2=\frac{0{,}4+\sqrt{0{,}08}}{0{,}02}=20+10\sqrt{2}\approx 34{,}14$$

   Le coefficient des t^2 vaut $a=0{,}01>0$. On déduit que :
   - $f''\geqslant 0$ donc f convexe sur $[0;20-10\sqrt{2}]\cup[20+10\sqrt{2};60]$
   - $f''\leqslant 0$ donc f concave sur $[20-10\sqrt{2};20+10\sqrt{2}]$

   (b) Sur l'intervalle [0;15], f'' s'annule une seule fois en changeant de signe, en $x=20-10\sqrt{2}$, donc C_f admet un unique point d'inflexion sur [0;15] .

   (c) $f''\geqslant 0$ sur $[0;20-10\sqrt{2}]$ puis $f''\leqslant 0$ sur $[20-10\sqrt{2};15]$ donc f' est croissante sur $[0;20-10\sqrt{2}]$ puis décroissante sur $[20-10\sqrt{2};15]$.
   Cela signifie que la vitesse d'augmentation du nombre de malades diminue à partir d'environ 6 jours car $20-10\sqrt{2}\approx 6$ arrondi à l'entier près.

5. (a) $(T): y=f'(10)(t-10)+f(10)$

avec $f'(10)=10e^{-1}(2-1)=10e^{-1}=\frac{10}{e}$ et $f(10)=10^2e^{-1}=\frac{100}{e}$ d'où :

$(T): y=\frac{10}{e}(t-10)+\frac{100}{e}$

$(T): y=\frac{10}{e}t-\frac{100}{e}+\frac{100}{e}$

$(T): y=\frac{10}{e}t$

(b) f concave sur $[20-10\sqrt{2};20+10\sqrt{2}]$ don cconcave sur $[6;34]$ qui contient 10 donc C_f est située en-dessous de toutes ses tangentes sur $[20-10\sqrt{2};20+10\sqrt{2}]$ donc en particulier en-dessous de (T). On déduit que $\forall x\in[6;34], f(t)\leqslant\frac{10}{e}x$ donc $t^2e^{-0,1t}\leqslant\frac{10}{e}t$.