

Sujet de préparation au devoir commun

Exercice 1 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les points $A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(0;1;2)$ et la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x=2+2k \\ y=-1+3k \\ z=-6-k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Question 1 : Un vecteur directeur de la droite (Δ) est :

- a. $\vec{u}_1(4;2;-7)$ b. $\vec{u}_2(2;-1;-6)$ c. $\vec{u}_3(2;3;1)$ d. $\vec{u}_4(4;6;-2)$

Question 2 : Le vecteur \overrightarrow{AB} admet pour coordonnées :

- a. $(1,5;0,5;1)$ b. $(-1;-1;2)$ c. $(1;1;-2)$ d. $(3;1;2)$

Question 3 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

- a.
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=2 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$
 b.
$$\begin{cases} x=2-t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$
- c.
$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$
 d.
$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=2-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Question 4 : Les droites (AB) et (Δ) sont :

- a. sécantes b. strictement parallèles c. non-coplanaires d. confondues

Question 5 : On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

- a. $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires b. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
- c. D a pour coordonnées $(3;-1;-1)$ d. Les points A, B, C et D sont alignés

Exercice 2 :

Dans une école de statistique, après une étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10% des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60% d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20% d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'événement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'événement « le candidat a été admis à l'école » ;
- \bar{D} et \bar{A} les événements contraires des événements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,24.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24. On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres. (Justifier la réponse)
2. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie au centième.
3. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.
4. En moyenne, combien y aura-t-il d'admis sur un échantillon de 7 candidats ?
5. Déterminer le plus grand entier k tel que $p(X \leq k) \leq 0,8$ et interpréter le résultat.

Exercice 3 :

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10% de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0=1000$.

1. Calculer u_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=0,9u_n+250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite(n) :  
    u = 1 000  
    for i in range(n) :  
        u = 0,9*u + 250  
    return u
```

4. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2500$.
5. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
6. Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
7. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n . Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.
8. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n et montrer que $u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500$.
9. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.
10. Compléter le programme écrit en langage Python pour que celui-ci affiche l'année pour laquelle le nombre d'abonnés dépassera 2200.

```
u=1000  
n=0  
while ..... :  
    u = .....  
    n=n+1  
print(.....)
```

11. Déterminer cette année.

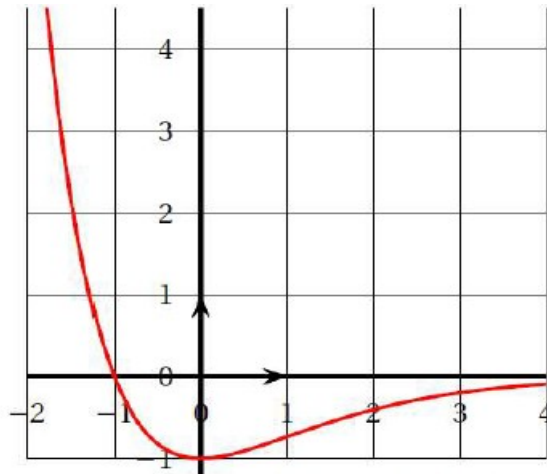
Exercice 4 :

Partie A :

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} .

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $[-2; 4]$.
2. Le tableau de signe de $f''(x)$ sur $[-2; 4]$.



Courbe représentant la dérivée f' de la fonction f .

Partie B :

On admet que la fonction f mentionnée dans la partie A est définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f(x) = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.
Justifier que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote que l'on précisera.
3. a. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$.
b. Étudier les variations sur \mathbb{R} de la fonction f et dresser son tableau de variations.
c. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point B d'abscisse 1.
4. Déterminer, pour tout nombre réel x , l'expression de $f''(x)$.
5. On admet que la courbe représentative d'une fonction a un point d'inflexion en un point d'abscisse a lorsque $f''(x)$ s'annule et change de signe en a . La courbe \mathcal{C} admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer les coordonnées du point d'inflexion.

Correction du sujet de préparation au devoir commun

Exercice 1 :

Question 1 : Réponse d. $\vec{u}_4(4;6;-2)$: d'après la représentation paramétrique, un vecteur directeur a pour coordonnées $(2;3;-1)$ et le seul vecteur colinéaire à celui-ci est $\vec{u}_4(4;6;-2)$

Question 2 : Réponse c. $(1;1;-2)$: $A(1;0;2)$ et $B(2;1;0)$ donc $\vec{AB}(2-1;1-0;0-2)$ soit la réponse c.

Question 3 : Réponse b. $\begin{cases} x=2-t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$: $\vec{AB}(1;1;-2)$ est un vecteur directeur de la

droite (AB)

$\begin{cases} x=2-t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$: un vecteur directeur de cette droite est de coordonnées $(-1;-1;2)$ qui est

colinéaire avec $\vec{AB}(1;1;-2)$ et $B(2;1;0)$ est sur cette droite ($t=0$) donc c'est la bonne réponse.

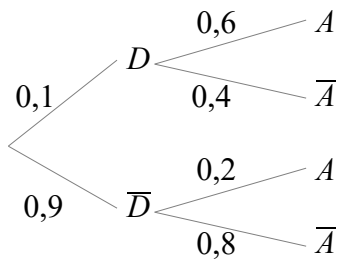
Question 4 : Réponse a. sécantes : $\vec{u}_4(4;6;-2)$ vecteur directeur de (Δ) et $\vec{AB}(1;1;-2)$ vecteur directeur de (AB) ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles ni confondues. En résolvant le système lié aux deux représentations paramétriques, on s'aperçoit qu'il a une solution qui est le point de coordonnées $(6;5;-8)$ d'où la réponse a.

Question 5 : Réponse a. $\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}$ sont coplanaires : $\vec{OD}=3\vec{OA}-\vec{OB}-\vec{OC}$ donc $3\vec{OA}-\vec{OB}-\vec{OC}-\vec{OD}=\vec{0}$ ainsi $3\vec{OA}-(\vec{OA}+\vec{AB})-(\vec{OA}+\vec{AC})-(\vec{OA}+\vec{AD})=\vec{0}$ soit $3\vec{OA}-\vec{OA}-\vec{AB}-\vec{OA}-\vec{AC}-\vec{OA}-\vec{AD}=\vec{0}$ donc $-\vec{AB}-\vec{AC}-\vec{AD}=\vec{0}$: les coefficients -1 ; -1 et -1 ne sont pas tous nuls donc les vecteurs $\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}$ sont coplanaires d'où la réponse a.

Exercice 2 :

Partie 1

1.



2. $p(D \cap A) = p(D) \times p_D(A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$

3. Les événements D et \bar{D} forment une partition de l'univers d'après la formule des probabilités totales on a :

$$p(A) = p(D \cap A) + p(\bar{D} \cap A) = 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,06 + 0,18 = 0,24$$

4. $p_A(\bar{D}) = \frac{p(\bar{D} \cap A)}{p(A)} = \frac{0,18}{0,24} = 0,75$

Partie 2

1. L'expérience consiste à choisir un candidat et regarder s'il est admis. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli : il y a « succès » si le candidat est admis, la probabilité de succès est $p = 0,24$.

Cette expérience est répétée 7 fois de façon identique et indépendante, la variable aléatoire suit donc la loi binomiale de paramètre $n = 7$ et $p = 0,24$

2. $p(X = 1) = \binom{7}{1} \times 0,24^1 \times 0,76^6 \approx 0,32$

3. $p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) \approx 0,53$

4. $E(X) = n \times p = 7 \times 0,24 = 1,68$: il y aura 1,68 candidats admis en moyenne sur un échantillon de 7 candidats

5. D'après la calculatrice, on a : $p(X \leq 2) \approx 0,777 < 0,8$ et $p(X \leq 3) \approx 0,938 > 0,8$ donc le plus grand entier k tel que $p(X \leq k) \leq 0,8$ est $k = 2$.

Cela signifie que l'on a moins de 80% de chance que dans un échantillon de 7 candidats, il y ait au plus 2 candidats admis.

Exercice 3 :

1. $u_1 = 1000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 250 = 1000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1150$.

2. $\forall n \in \mathbb{N} , u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 250 = 0,9 u_n + 250$.

3. La valeur renvoyée par suite(10) est u_{10}

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété « $u_n \leq 2500$ »

Initialisation : pour $n=0$, $u_0=1000$ et $1000 \leq 2500$ donc $u_0 \leq 2500$. La propriété $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit k un entier naturel. On suppose que $P(k)$ est vraie.

En utilisant l'hypothèse de récurrence on a : $u_k \leq 2500$

Ainsi $0,9 u_k \leq 2250$ donc $0,9 u_k + 250 \leq 2500$ soit $u_{k+1} \leq 2500$: la propriété $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit, $u_n \leq 2500$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

5. $\forall n \in \mathbb{N} , u_{n+1} - u_n = 0,9 u_n + 250 - u_n = -0,1 u_n + 250$. Or $\forall n \in \mathbb{N} , u_n \leq 2500$ donc $-0,1 u_n \geq -250$ et donc $-0,1 u_n + 250 \geq 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ soit $u_{n+1} \geq u_n$: la suite (u_n) est croissante.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N} , u_n \leq 2500$ donc la suite (u_n) est majorée par 2500 et la suite (u_n) est croissante donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N} , v_{n+1} = u_{n+1} - 2500 = 0,9 u_n + 250 - 2500 = 0,9 u_n - 2250$.

Or $v_n = u_n - 2500$ donc $u_n = v_n + 2500$ donc $v_{n+1} = 0,9(v_n + 2500) - 2250$ donc

$v_{n+1} = 0,9 v_n + 2250 - 2250 = 0,9 v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9. De plus

$v_0 = u_0 - 2500 = 1000 - 2500 = -1500$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N} , v_n = v_0 \times q^n = -1500 \times 0,9^n$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N} ,$

$u_n = v_n + 2500 = -1500 \times 0,9^n + 2500$

9. $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1500 \times 0 + 2500 = 2500$

Cela signifie qu'au bout d'un très grand nombre d'année, l'influenceuse aura environ 2500 abonnés.

10.

```
u=1000
n=0
while u<=2200:
    u=0.9*u+250
    n=n+1
print(2020+n)
```

11. D'après la calculatrice, $u_{15} < 2200$ et $u_{16} > 2200$ donc $n = 16$ et l'année est 2036.

Exercice 4 : (5 points)

Partie A

1. D'après le graphique, $f'(x) \geq 0$ sur $[-2; -1]$ donc f est croissante sur $[-2; -1]$ puis $f'(x) \leq 0$ sur $[-1; 4]$ donc f est décroissante sur $[-1; 4]$.
2. D'après le graphique, f' est décroissante sur $[-2; 0]$ donc $f''(x)$ est négative sur $[-2; 0]$ puis f' est croissante sur $[0; 4]$ donc $f''(x)$ est positive sur $[0; 4]$
On a donc le tableau de signe ci-dessous.

x	-2	0	4
$f''(x)$	-	0	+

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$ donc d'après les règles sur la somme des limites,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $-1 < 0$ donc d'après les règles sur le produit des limites,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$. De plus $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition des limites
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$.

D'après les règles sur le produit des limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)e^{-x} = xe^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}$

$\frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$ et d'après les formules de limites de croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ donc d'après les règles sur le quotient des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $-1 < 0$ donc d'après les règles sur le produit des limites,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$. Enfin $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 + 2 \times 0 = 0$: la courbe \mathcal{C} admet une asymptote horizontale d'équation
 $y = 0$

3. a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - (x+2)) = e^{-x}(-1-x)$
b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $-1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$

On a donc le tableau ci-dessous

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
e^{-x}	+	0	+
$-x-1$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	e	0

c. $f'(1) = (-1-1) \times e^{-1} = -2e^{-1}$ donc l'équation réduite de la tangente est de la forme $y = -2e^{-1}x + p$.

De plus $f(1) = (1+2) \times e^{-1} = 3e^{-1}$ donc la tangente passe par le point de coordonnées $(1; 3e^{-1})$ ainsi on a $3e^{-1} = -2e^{-1} \times 1 + p$ donc $p = 3e^{-1} + 2e^{-1} = 5e^{-1}$.

L'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point B d'abscisse 1 est $y = -2e^{-1}x + 5e^{-1}$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -1 \times e^{-x} + (-x-1) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(-1 - (-x-1)) = x e^{-x}$

5. Il faut établir le tableau de signe de $f''(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0 \text{ et } x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

On a donc le tableau de signe ci-dessous

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
e^{-x}	+	0	+
$f''(x)$	-	0	+

D'après le tableau de signe, $f''(x)$ s'annule et change de signe pour $x=0$, la courbe admet donc un point d'inflexion. De plus $f(0) = (0+2) \times e^0 = 2 \times 1 = 2$ donc les coordonnées du point d'inflexion sont $(0; 2)$.